2+1 Boyutlu Eğri Hiperyüzeyde Dirac Denklemi

Mehmet Ali Olpak

Fizik Bölümü
Orta Doğu Teknik Üniversitesi

Ankara, Aralık 2011

Outline

Genel Durum

- N boyutlu bir uzayın, daha düşük boyutlu bir alt kümesine kısıtlanmış bir sistemi ele alalım. İlgili QM hareket denklemleri nelerdir?
- Motivasyon: "bükülebilir" QM sistemler (karbon nanotüler gibi) [2]; efektif olarak Dirac denklemine uyan sistemler (graphene gibi) [1], vs.

İncelenen Durum

- Dirac denk. uyan bir parçacık (3+1 D).
- Elektrostatik alan (klasik)
- Parçacığın kısıtlandığıyüzey

Basamaklar

- Koordinat transformasyonu: bir koordinat (q^3) yüzey boyunca sabit kalsın.
- Bu koordinat yüzeye dik olsun.
- Nesneleri $q^3 = 0$ etrafında açalım.
- $q^3 = 0$'da denklemi teğet ve normal parçalara ayıralım.

Outline

Ele alınan durum:

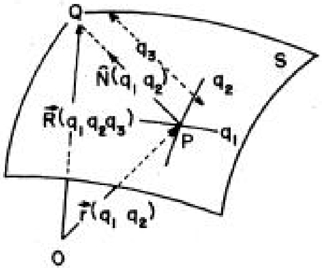

FIG. 1. Curvilinear coordinate system based on the surface S of parametric equation $\vec{r}=\vec{r}(q_1, q_2)$.

Figure: Ref: [3]

Geometri

P'nin Q'ya S üzerinde en yakın nokta olduğunu ve q^3'ün diğer uzunluklara kıyasla küçük olduğnu varsayalım. Q'nun konum vektörü:

$$\mathbf{R}(q^1, q^2, q^3) = \mathbf{r}(q^1, q^2) + q^3\mathbf{N}(q^1, q^2) \tag{1}$$

q^3: normal koordinat, $\mathbf{N}$: yüzeyin birim normal vektörü.

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q^\mu} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q^\nu} \\ G_{ij} &= \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} + q^3 \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial q^i} \right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^j} + q^3 \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial q^j} \right), \qquad i, j = 1, 2 \\ G_{i3} &= 0, \qquad G_{33} = 1. \end{aligned} \tag{2}$$

Outline

Genel Denklem

Parçacığın EM alanla [2]'deki gibi etkileştiğni varsayalım. Bu durumda genel denklem [2]:

$$i\hbar D_0\Psi = \frac{1}{2m}\left[-\frac{\hbar^2}{\sqrt{G}}\partial_\mu(\sqrt{G}G^{\mu\nu}\partial_\nu\Psi) + \frac{iQ\hbar}{\sqrt{G}}\partial_\mu(\sqrt{G}G^{\mu\nu}A_\nu)\Psi + 2iQ\hbar G^{\mu\nu}A_\nu\partial_\mu\Psi + Q^2G^{\mu\nu}A_\mu A_\nu\Psi\right]. \quad (3)$$

olur; Q: parçacığın yükü, $D_0 \equiv \partial_t + \frac{iQ}{\hbar}\Phi$, $\mathbf{A}$: vektör potansiyel, Φ: skalar potansiyel.

Dalga Fonksiyonu

Normalizasyon integrali [2]:

$$\int d^3x \Psi^*(x)\Psi(x) = \int d^3q\sqrt{G}\Psi^*(q)\Psi(q)$$
$$= \int d^3q\sqrt{g}\left(1 + q^3 Tr(\alpha) + (q^3)^2 det(\alpha)\right)\Psi^*(q)\Psi(q) = 1. \quad (4)$$

Burada

$$\frac{\partial \mathbf{N}(q)}{\partial q^i} \equiv \alpha_i{}^j \frac{\partial \mathbf{r}(q)}{\partial q^j}. \quad (5)$$

Tanım: $\chi(q) \equiv (1 + q^3 Tr(\alpha) + (q^3)^2 det(\alpha))^{1/2}\psi(q)$. Bu durumda:

$$\int d^3x \Psi^*(x)\Psi(x) = \int d^2q dq^3 \sqrt{g}\chi^*(q)\chi(q) \quad (6)$$

Elde Edilen Schrödinger Denk.

Elde edilen denklemler:

$$i\hbar D_0 \chi_n = -\frac{\hbar^2}{2m}(\partial_3)^2 \chi_n + V_\lambda(q^3)\chi_n \tag{7}$$

$$i\hbar D_0 \chi_s = \frac{1}{2m}\Bigg[-\frac{\hbar^2}{\sqrt{g}}\partial_i(\sqrt{g}g^{ij}\partial_j\chi_s) + \frac{iQ\hbar}{\sqrt{g}}(\sqrt{g}g^{ij}A_j)\chi_s + 2iQ\hbar g^{ij}A_i\partial_j\chi_s + Q^2 g^{ij}A_iA_j\chi_s\Bigg] + V_s\chi_s \tag{8}$$

Önemli: yüzey üzerinde ölçülebilir nicelikleri hesaplarken "dış dünya"ya referans gerekmiyor.

$V_s \equiv \frac{-\hbar^2}{2m}\left(\left(\frac{1}{2}Tr(\alpha)\right)^2 - det(\alpha)\right)$: geometrik potansiyel [2].

Dirac Denklemi Uygulaması

- Eğri uzayzamanda Dirac denklemi [4]:

$$(i\gamma^a E_a{}^\mu D_\mu - m)\psi(q) = 0. \tag{9}$$

- M^4'te genel bir koordinat sistemi
- q^3'ün kuvvetleri cinsinden açılım ($O(q^3)$'e kadar)
- Latin harfleri: düz koordinatlar, Yunan harfleri: genel koordinatlar

Bu konu daha önce Burgess ve Jensen tarafından [4]'te ele alındı.

Dirac Denklemi Uygulaması

- Metrik: [4, 5]

$$\left[G_{\mu\nu}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & G_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

- "Vierbein"lar:

$$\begin{gathered} e^a{}_\mu E_a{}^\nu = \delta^\nu{}_\mu, \; e^a{}_\mu E_b{}^\mu = \delta^a{}_b, \\ e^a{}_\mu e^b{}_\nu \eta_{ab} = G_{\mu\nu}, \; E_a{}^\mu E_b{}^\nu \eta^{ab} = G^{\mu\nu}. \end{gathered} \tag{11}$$

Dirac Denklemi Uygulaması

- Dirac matrislerinin cebiri:

$$[\gamma^a, \gamma^b]_+ = 2\eta^{ab} \tag{12}$$

- Christoffel katsayıları:

$$\omega_\mu = \frac{1}{8}\omega_{ab\mu}[\gamma^a, \gamma^b], \tag{13}$$

$$\omega^a{}_{b\mu} \equiv -E_b{}^\nu \nabla_\mu e^a{}_\nu. \tag{14}$$

- Bu şekilde:

$$\gamma^c E_c{}^\mu \omega_{ab\mu}[\gamma^a, \gamma^b] = 2\gamma^a(\nabla_\mu E_a{}^\mu). \tag{15}$$

Dirac Denklemi Uygulaması

- Yeniden tanımlanmış spinör [5]:

$$\chi \equiv \psi\sqrt{F},$$
$$F \equiv 1 + q^3\, Tr\, \alpha. \tag{16}$$

- Seçilen "Vierbein"lar:

$$e^a{}_i = \partial_i x^a + q^3 \partial_i n^a = \partial_i x^a + q^3 \alpha_i{}^k \partial_k x^a,$$
$$e^0{}_0 = 1,\ e^a{}_3 = N^a,\ a = 1,2,3,\ \text{diğerleri} = 0, \tag{17}$$

ve (tilda: "yüzeyde")

$$E_a{}^i = \tilde{E}_a{}^i - q^3 \alpha_k{}^i \tilde{E}_a{}^k,\ E_0{}^0 = 1,\ E_a{}^3 = N_a,$$
$$a = 1,2,3,\ \text{diğerleri} = 0. \tag{18}$$

Dirac Denklemi Uygulaması

- EM (klasik) alanda [5]:

$$i\left(\gamma^0\partial_0 + \gamma^A\tilde{E}_A{}^i\partial_i + \frac{1}{4}\gamma^A(\tilde{\nabla}_i\tilde{E}_A{}^i) - \frac{1}{4}\gamma^A\tilde{N}_A Tr(\alpha) + \gamma^A\tilde{N}_A\partial_3\right)\chi + \left(e\gamma^0 A_0(q^3) - m\right)\chi = 0,\ A = 1,2,3;\ i = 1,2. \tag{19}$$

- Ekstra terim:

$$V_{geo.} = -\frac{1}{4}\gamma^A\tilde{N}_A Tr(\alpha). \tag{20}$$

- Soru: $V_{geo.}$'i nasıl yorumlayabiliriz?
- Yanıt: (arXiv: 1010.2370v3 [hep-th])

$$(\gamma^0 e\lambda q^3 - i\gamma^A \tilde{N}_A \partial_3)\chi = K\chi. \tag{21}$$

Çözüm:

$$\chi \equiv exp[-a(q^3)^2 + bq^3] \sum_{r=1}^{4} h_r(t, q^i) V_r(q^i), \tag{22}$$

$a > 0,\ b = 0$ ve

$$i\gamma^A \tilde{N}_A V_r(q^i) \equiv c_r V_r(q^i). \tag{23}$$

Burgess ve Jensen'in çalışması[4] ile farklar:

- Elde edilen denk.:

$$\sum_{r=1}^{4}\Bigg[i\Big(\gamma^0\partial_0+\gamma^A\tilde{E}_A{}^i\partial_i+\frac{1}{4}\gamma^A(\tilde{\nabla}_i\tilde{E}_A{}^i)\Big) - \frac{c_r}{4}Tr(\alpha)-m\Bigg]\Big(h_r(t,q^i)V_r(q^i)\Big)=0. \tag{24}$$

- [4]'te içsel eğriliği sıfır olan yüzeyler, burada genel durum inceleniyor.

Burgess ve Jensen'in çalışması [4] ile farklar:

- Geometrik terim $V_{geo.}$: [4]'te, $V_{geo.} = -\frac{1}{2}\gamma^A \tilde{N}_A Tr(\alpha)$; Christoffel kat.'dan gelen katkı yok.
- [4]'te $b \neq 0$, ancak "büyük olasılıkla" parçacık "yüzey" üzerinde, dolayısıyla $b = 0$ (prob. conservation).

Açık noktalar:

- $\frac{c_r}{4} Tr(\alpha) + m$ efektif kütle terimleri gibi görünmekte; tam çözüme göre yorunlanmalı.
- Yaklaşımın geometrik ve deneysel geçerlilik koşulları([4]'te ele alınmış).
- γ'ların 3+1 D rep. 4x4. Denklem hangi koşullarda diagonalize edilebilir (2x2 olarak) ([4]'te ele alınmış)?

Ek okuma I

R. Jackiw, S. Y. Pi.
Chiral Gauge Theory for Graphene
arXiv:cond-mat/0701760v2 [cond-mat.str-el].

G. Ferrari, G. Cuoghi.
Schrödinger equation for a particle on a curved surface in an electric and magnetic field.
Phys. Rev. Lett, 100(23):230403, 2008.

R. da Costa.
Quantum Mechanics of a Cosntrained Particle.
Phys. Rev. A, 23(4):1982–1987, 1981.

Ek okuma II

M. Burgess, B. Jensen
Fermions Near Two Dimensional Surfaces
Phys. Rev. A, 48(3):1861–1868, 1981.

M. A. Olpak
Dirac Equation on a 2+1 Dimensional Hypersurface
arXiv:1010.2370 [hep-th], to be published in Mod. Phys. Lett. A.

TEŞKKÜR EDERİM