

Örgü Kuantum Renk Dinamiği

Kadir Utku Can
Orta Doğu Teknik Üniversitesi

Ankara Yüksek Enerji Fiziği Çalıştayı, 2011

İçerik

- 1 Örgü Modeli
 - Niye Örgü?
 - Örgü nedir?
- 2 Sürekli ve Kesikli Uzay KRD
 - Fermiyon Eylemi
 - Gauge Eylemi
- 3 Sayısal Hesaplamalar
 - İlişkilendirme (Correlation) fonksiyonları
 - Sonuçlar
- 4 TR Örgü KRD grubu

İçerik

- 1 Örgü Modeli
 - Niye Örgü?
 - Örgü nedir?
- 2 Sürekli ve Kesikli Uzay KRD
 - Fermiyon Eylemi
 - Gauge Eylemi
- 3 Sayısal Hesaplamalar
 - İlişkilendirme (Correlation) fonksiyonları
 - Sonuçlar
- 4 TR Örgü KRD grubu

Bu modele niye ihtiyacımız var?

- KRD teorisini tam olarak çözemiyoruz.
- Tedirgeme yöntemi düşük enerjilerde çalışmıyor
- Tedirgeme dışı yöntemler gerekli
 - Bunlardan biri: **Örgü KRD**¹

Kısaca Örgü KRD

- $\langle \hat{O}_1 \hat{O}_2 \dots \hat{O}_N \rangle = \frac{1}{Z} \int D[U] e^{-S_G[U]} D[\psi, \bar{\psi}] e^{-S_F[\psi, \bar{\psi}, U]} \hat{O}_1 \hat{O}_2 \dots \hat{O}_N[\psi, \bar{\psi}, U]$
- Sayısal çözüm mümkün ancak formülasyon değişmeli
 - Fermiyon ve Gauge eylemi kesikli uzaya uygun hale gelmeli
 - Wick Dönüşümü: $t = i \tau$
 $g_{\mu\nu}^{Minkowski} \rightarrow g_{\mu\nu}^{Euclidean} = (-1, -1, -1, -1)$

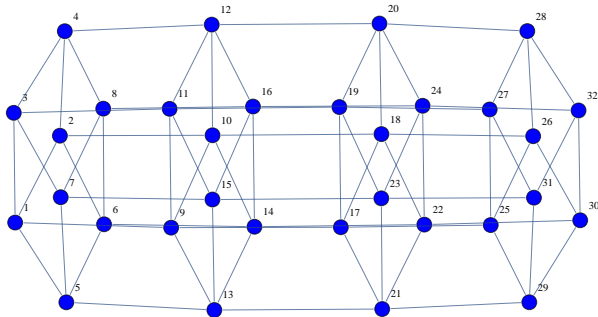
¹K.G Wilson, PRD.10.2445, 1974

İçerik

- 1 Örgü Modeli
 - Niye Örgü?
 - Örgü nedir?
- 2 Sürekli ve Kesikli Uzay KRD
 - Fermiyon Eylemi
 - Gauge Eylemi
- 3 Sayısal Hesaplamalar
 - İlişkilendirme (Correlation) fonksiyonları
 - Sonuçlar
- 4 TR Örgü KRD grubu

Yapısı

- 4-boyutlu hiperküp
- Kesişim noktaları: *Fermiyon alanları*
- Kenarlar: *Bağlantı Değişkenleri*
- *Tekrarlanan Sınır Koşulları*

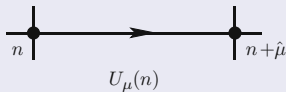
Figure: $2^3 \times 4$ Örgü (3-boyuta iz düşümü)

Elemanları

Fermiyon Alanları

$$\psi(\mathbf{x}) \rightarrow \psi(a \mathbf{n}) \quad \bar{\psi}(\mathbf{x}) \rightarrow \bar{\psi}(a \mathbf{n}), \quad a \rightarrow \text{örgü aralığı}$$

Bağlantı Değişkenleri



$$U_{\mu} = \begin{matrix} r & g & b \\ \begin{matrix} r \\ g \\ b \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc} U_{\mu}^{rr} & U_{\mu}^{rg} & U_{\mu}^{rb} \\ U_{\mu}^{gr} & U_{\mu}^{gg} & U_{\mu}^{gb} \\ U_{\mu}^{br} & U_{\mu}^{bg} & U_{\mu}^{bb} \end{array} \right) \end{matrix}$$

Figure: Bağlantı Değişkenleri

Tekrarlanan Sınır Koşulları

$$x_0(0, n_2, n_3, n_4) = x_N(N, n_2, n_3, n_4) \quad U_{\mu}(N, n_2, n_3, n_4) = U_{\mu}(0, n_2, n_3, n_4)$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$x_0(n_1, n_2, n_3, 0) = x_N(n_1, n_2, n_3, N_T) \quad U_{\mu}(n_1, n_2, n_3, 0) = U_{\mu}(n_1, n_2, n_3, N_T)$$

İçerik

- 1 Örgü Modeli
 - Niye Örgü?
 - Örgü nedir?
- 2 Sürekli ve Kesikli Uzay KRD
 - Fermiyon Eylemi
 - Gauge Eylemi
- 3 Sayısal Hesaplamalar
 - İlişkilendirme (Correlation) fonksiyonları
 - Sonuçlar
- 4 TR Örgü KRD grubu

Fermiyon Eylemi

Sürekli Uzay

$$S_F[\psi, \bar{\psi}, A] = \int d^4x \bar{\psi}(x) [\not{\partial} + ig\not{A}(x) + m]\psi(x)$$

Kesikli Uzay

$$S_F[\psi, \bar{\psi}, U] = a^4 \sum_{n \in \Lambda} \bar{\psi}(n) \left[\sum_{\mu=1}^4 \gamma_{\mu} \frac{U_{\mu}(n)\psi(n + \hat{\mu}) - U_{\mu}^{\dagger}(n)\psi(n - \hat{\mu})}{2a} + m\psi(n) \right]$$

i) $\psi(\mathbf{x}) \rightarrow \psi(a\mathbf{n})$ $\bar{\psi}(\mathbf{x}) \rightarrow \bar{\psi}(a\mathbf{n})$, $a \rightarrow$ örgü aralığı

ii) $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3, n_4)$, $n_{1,2,3} = 0, 1, \dots, N-1$ $N \equiv$ uzay boyutu
 $n_4 = 0, 1, \dots, N_T-1$ $N_T \equiv$ zaman boyutu

iii) $\partial_{\mu}\psi(x) \equiv \frac{1}{2a} [\psi(n + \hat{\mu}) - \psi(n - \hat{\mu})]$

iv) $U_{\mu}(n) \rightarrow U'_{\mu}(n) = \Omega(n)U_{\mu}(n)\Omega^{\dagger}(n + \hat{\mu})$, $U_{\mu}(n) = \exp(iaA_{\mu}(n))$

Fermiyon Eylemi

Dirac Terimi ve Çiftlenim

$$S_F[\psi, \bar{\psi}, U] = a^4 \sum_{n,m \in \Lambda} \sum_{a,b,\alpha,\beta} \bar{\psi}(n)_a \alpha D(n|m)_{\alpha\beta} \psi(m)_b$$

$$D(n|m)_{\alpha\beta} = \sum_{\mu=1}^4 (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} \frac{U_\mu(n)_{ab} \delta_{n+\hat{\mu},m} - U_\mu^\dagger(n)_{ab} \delta_{n-\hat{\mu},m}}{2a} + m \delta_{\alpha\beta} \delta_{ab} \delta_{n,m}$$

SORUN: Fermiyon Çiftlenimi (Doubling)

- Fourier Dönüşümü $\rightarrow \tilde{D}(p) = m + \frac{i}{a} \sum_{\mu=1}^4 \gamma_\mu \sin(p_\mu a)$

- Serbest Fermiyon Prop.

$$\tilde{D}^{-1}(p) = \frac{ia^{-1} \sum_{\mu} \gamma_\mu \sin(p_\mu a)}{a^{-2} \sum_{\mu} \sin^2(p_\mu a)} \xrightarrow{a \rightarrow 0} \frac{-i \sum_{\mu} \gamma_\mu p_\mu}{p^2}$$

- $\propto \sin(p_\mu a) \rightarrow p_\mu = (\pi/a, 0, 0, 0), (0, \pi/a, 0, 0), \dots, (\pi/a, \pi/a, \pi/a, \pi/a)$
 - $2^4 - 1$ tane fazladan Fermiyon?

Problemin Çözümü

$$\tilde{D}(p) = m + \frac{i}{a} \sum_{\mu=1}^4 \gamma_{\mu} \sin(p_{\mu} a) + \overbrace{\frac{1}{a} \sum_{\mu=1}^4 (1 - \cos(p_{\mu} a))}^{\text{Wilson Terimi}}$$

- $p_{\mu} = 0$ veya $a \rightarrow 0$ için katkısı yok

Eylem

$$S_F[\psi, \bar{\psi}, U] = a^4 \sum_{n, m \in \Lambda} \bar{\psi}(n) D(n|m) \psi(m)$$

$$D(n|m) = m + \frac{4}{a} - \frac{1}{2a} \sum_{\mu=1}^4 U_{\mu}(n) \delta_{n+\hat{\mu}, m} + U_{\mu}^{\dagger}(n) \delta_{n-\hat{\mu}, m} \\ + \frac{1}{2a} \sum_{\mu=1}^4 \gamma_{\mu} (U_{\mu}(n) \delta_{n+\hat{\mu}, m} + U_{\mu}^{\dagger}(n) \delta_{n-\hat{\mu}, m})$$

İçerik

- 1 Örgü Modeli
 - Niye Örgü?
 - Örgü nedir?
- 2 Sürekli ve Kesiklik Uzay KRD
 - Fermiyon Eylemi
 - Gauge Eylemi
- 3 Sayısal Hesaplamalar
 - İlişkilendirme (Correlation) fonksiyonları
 - Sonuçlar
- 4 TR Örgü KRD grubu

Wilson Gauge Eylemi

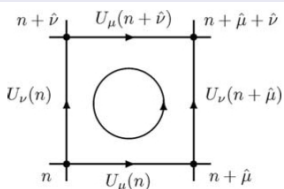
Plaket Tanımı

Sürekli Uzay

$$S_G[A_\mu(x)] = \frac{1}{2} \int d^4x \text{Tr}[F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}]$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu]$$

Kesikli Uzay



- Plaket: Bağlantı değişkenlerinden oluşan en temel gauge invariant yapı

- $U_{\mu\nu}(n) = U_\mu(n)U_\nu(n+\hat{\mu})U_\mu^\dagger(n+\hat{\nu})U_\nu^\dagger(n)$

Eylem

$$S_G[U] = \frac{\beta}{3} \sum_{n \in \Lambda} \sum_{\mu < \nu} \Re \{ \text{Tr}[\mathbb{I} - U_{\mu\nu}(n)] \}$$

$$\beta = 6/g^2$$

Figure: Plaket

İçerik

- 1 Örgü Modeli
 - Niye Örgü?
 - Örgü nedir?
- 2 Sürekli ve Kesikli Uzay KRD
 - Fermiyon Eylemi
 - Gauge Eylemi
- 3 Sayısal Hesaplamalar
 - İlişkilendirme (Correlation) fonksiyonları
 - Sonuçlar
- 4 TR Örgü KRD grubu

2 nokta İlişkilendirme Fonksiyonu

Iso-Triplet operator $O_T = \bar{d}(n) \Gamma u(n)$

$$\langle O_T(n) \bar{O}_T(m) \rangle = -\frac{1}{\mathcal{Z}} \int \mathcal{D}[U] e^{-S_G[U]} \overbrace{\det[D_u] \det[D_d]}^{\text{quark denizi etkileri}} \\ \times \text{Tr}[\Gamma D_u^{-1}(n|m) \Gamma D_d^{-1}(m|n)] \\ \mathcal{Z} = \int \mathcal{D}[U] e^{-S_G[U]} \det[D_u] \det[D_d]$$

- Dirac operatörleri $12|\Lambda| \times 12|\Lambda|$ elemana sahip $\propto \mathcal{O}(10^9) - \mathcal{O}(10^{15})$
 - Determinant ve İlerletici hesabı çok zaman alıyor!

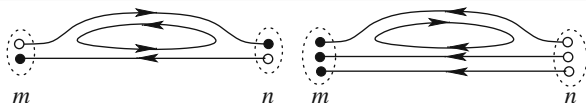


Figure: Quark Denizi etkileri

2 nokta İlişkilendirme Fonksiyonu

Hesap Kolaylığı

"Quenched" Yaklaşımı



Figure: Quark Denizi etkileri yok sayılıyor

$$\det[D_u] = 1 \quad \det[D_d] = 1$$

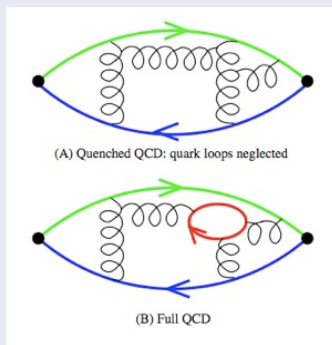


Figure: Quenched vs. Unquenched
[4]

2 nokta İlişkilendirme Fonksiyonu

Hesap Kolaylığı

Quark Kaynakları(Sources)

$$D^{-1}(n|m)_{\beta\alpha_0} = \sum_{m,\alpha,a} D^{-1}(n|m)_{\beta\alpha} S_0^{m_0,\alpha_0,a_0}(m)_a^\alpha$$

- Noktasal(Point) ve Yayılmış(Smeared) kaynaklar

Dirac Delta (Noktasal) $S_0^{m_0,\alpha_0,a_0}(m)_a^\alpha = \delta(m - m_0)\delta_{\alpha\alpha_0}\delta_{aa_0}$

Gaussian (Yayılmış) $S_0^{m_0,\alpha_0,a_0} = \sum_{i=1}^N e^{\sigma \nabla^2}$

$$\nabla^2 = \sum_{j=1}^{i_3} \left(U_j(\mathbf{n}, n_t) \delta(\mathbf{n} + \hat{j}, m) + U_j^\dagger(\mathbf{n} - \hat{j}, n_t) \delta(\mathbf{n} - \hat{j}, n_t) \right)$$

İlerletici ve Determinant

"Hopping" Açılımı

İlerletici

$$D = \mathbb{I} - \kappa H, \quad H(n|m)_{\alpha\beta}^{ab} = \sum_{\mu=\pm 1}^{\pm 4} (\mathbb{I} - \gamma_{\mu})_{\alpha\beta} U_{\mu}(n)_{ab} \delta_{n+\hat{m}\mu, n}$$

- Yinelemeli sayısal çözüm teknikleri $\rightarrow D^{-1}(n|m)$
 - Successive Overrelaxation, Bi-Conjugate Gradient Stabilized vb.
- Fermiyon çizgileri \equiv Bağlantı değişkenleri kombinasyonu

Determinant

$$\det[D] = \exp\left(-\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \kappa^j \text{Tr}[H^j]\right), \quad \kappa = \frac{1}{2(ma+4)}$$

- Fermiyon Halkaları(Loop) \equiv Quark denizi

2 Nokta İlişkilendirme Fonksiyonu

$$\langle O_T(n) \bar{O}_T(m) \rangle = -\frac{1}{Z} \int \overbrace{\mathcal{D}[U] e^{-S_G[U]}}^{\text{Ağırlık(weight) fonk.}} \det[D_u] \det[D_d] \\ \times \text{Tr}[\Gamma D_u^{-1}(n|m) \Gamma D_d^{-1}(m|n)] \\ Z = \int \mathcal{D}[U] e^{-S_G[U]} \det[D_u] \det[D_d]$$

- Ağırlık fonksiyonuna göre oluşturulmuş *Örgüler* yardımıyla integral hesabı

İçerik

- 1 Örgü Modeli
 - Niye Örgü?
 - Örgü nedir?
- 2 Sürekli ve Kesikli Uzay KRD
 - Fermiyon Eylemi
 - Gauge Eylemi
- 3 Sayısal Hesaplamalar
 - İlişkilendirme (Correlation) fonksiyonları
 - Sonuçlar
- 4 TR Örgü KRD grubu

Sorunlar ve yaklaşımlar

- $1/\sqrt{N}$ MC hataları, $O(a)$ kesikleme(discretization) hataları
- Sonlu boyut etkileri (Finite size effects)
 - Sınırlardaki etkileşimler \rightarrow kütle düzeltmeleri $\mathcal{O}(\exp(-LM_\pi))$
 - $LM_\pi \geq 4$ ise ihmal edilebilir
 - Hadron kütlelerinin hacim bağımlılığı $\propto 1/L^n, n \approx 2 - 3$
 - $L \geq 3 fm$ ise ihmal edilebilir
- Süreklilik limiti $a \rightarrow 0$:
 - Azalan a değerlerine sahip Örgüler ile hesap
- Chiral limit $m_q \rightarrow 0$:
 - Azalan m_q değerlerine sahip Örgüler ile hesap
- Örgü birimine sahip sonuçlar:
 - a 'nın değeri (Sommer parametresi [7])
 - Birbirlerine oranı

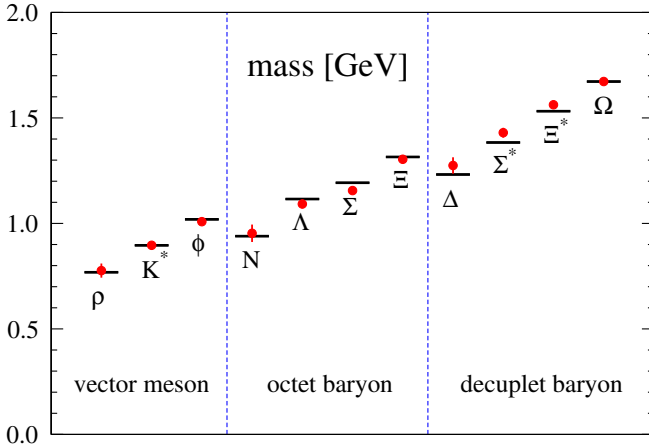


Figure: Hafif hadron tayfi. Kırmızı noktalar: Örgü hesapları. Yatay çizgiler: Deneysel sonuçlar. PACS-CS grubu[5]

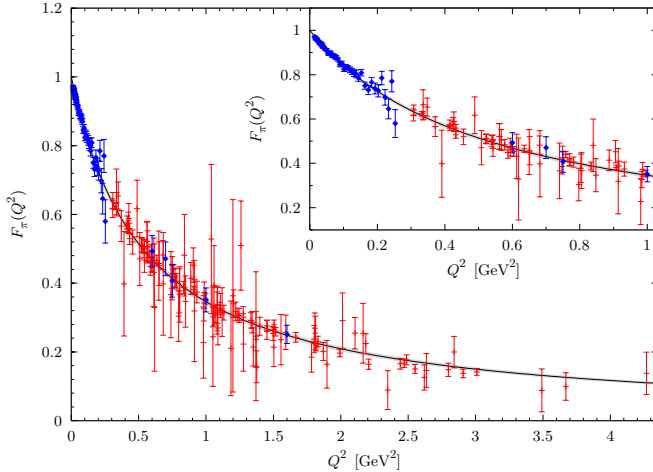


Figure: Pion elektromanyetik Yapı Faktörü Kırmızı: Örgü hesapları. Mavi: Deneysel sonuçlar. QCDSF/UKQCD grubu[6]

Türkiye’de Örgü KRD Çalışmaları

- PACS-CS örgüleri [5]
 - 2+1 çeşnili (u,d,s), $32^3 \times 64 \equiv (2.9024 fm)^3 \times 5.8048 fm$
 - $\beta = 1.90$, $a = 0.0907(13)fm$
 - $\kappa_{ud} = 0.13700, 0.13727, 0.13754, 0, 13770$, $\kappa_s = 0.13640$
 - $m_\pi = 702MeV - 156MeV$ hala daha fiziksel π değil
- Sayısal hesaplar için süperbilgisayarlara ihtiyaç var
 - İTÜ’nün süperbilgisayarı UYBHM (Ulusal Yüksek Başarımli Hesaplama Merkezi)
 - Hesaplar için yeterli, örgü üretmek için değil
 - İlerletici hesabı $\approx 25-30dk$ ($\kappa = 0.13700$), 64 CPU

TR Örgü KRD grubu

Grup Üyeleri

- Doç. Dr. Güray Erkol (Özyeğin Üni.)
- Prof. Dr. Altuğ Özpineci (ODTÜ)
- Kadir Utku Can (ODTÜ)
- Murat Metehan Türkoğlu (İTÜ)
- Belki sizlerden biri?

Yurtdışı çalışma ortakları

- Prof. Dr. Makoto Oka (Tokyo Inst. of Tech., Japonya)
- Toru. T. Takahashi (Gunma Inst. of Tech., Japonya)

TR Örgü KRD grubu

Çalışmalar

- Yapı faktörleri (form factors)
 - Axial vector
 - Pseudoscalar
 - Tensor
 - Electromagnetic
- Strange Baryon yapı faktörleri

Özet

- Örgü metodu: Feynman iz integrallerini hesaplamak
 - a : örgü aralığı
 - U_μ : bağlantı değişkenleri
 - Kesikli uzay eylemleri
- Sorunlar: Fermiyon çiftlenimi, sonlu boyut etkileri
Limitler: Süreklilik ve chiral limit
- Tayf ve yapı faktörleri hesabı
- TR Örgü grubunun desteğe ihtiyacı var.

Kaynaklar I



Gattringer C., Lang C.B.

Quantum chromodynamics on the lattice:An Introductory Presentation.

Lect. Notes Phys. 788, 2010.

doi: 10.1007/978-3-642-01850-3



Kenneth G. Wilson

Confinement of quarks

Phys. Rev. D., 10, 2445,1974.

doi:10.1103/PhysRevD.10.2445



Ph. Hagler

Hadron structure from lattice quantum chromodynamics

Physics Reports, 490:49 - 175,2010.

doi:10.1016/j.physrep.2009.12.008



Rajan Gupta

Introduction to Lattice QCD:

arxiv:hep-lat/9807028

Kaynaklar II



Aoki, S. et.al

PACS-CS Collaboration

2 + 1 flavor lattice QCD toward the physical point

Phys. Rev. D, 79, 034503, 2010.

doi:10.1103/PhysRevD.79.034503



Brömmel, D. et.al

QCDSF/UKQCD Collaboration

The pion form factor from lattice QCD with two dynamical flavours

Eur.Phys.J., C51, 2007.

arxiv:hep-lat/0608021v2



R. Sommer

Introduction to Lattice QCD:

Nucl. Phys. B, 411, 839 (1994)

TEŞEKKÜRLER

Effective Mass

Where is the mass term?

- For $N_T \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned}
 C(n_t) &= \frac{\sum_{m,n} \langle m | \hat{O}_2 | n \rangle \langle n | \hat{O}_1 | m \rangle e^{-n_t \Delta E_n} e^{-(N_T - n_t) \Delta E_m}}{1 + e^{-n_t \Delta E_1} + e^{-n_t \Delta E_2} + \dots} \\
 &= \underbrace{|\langle n | \hat{O}_T^\dagger | 0 \rangle|^2}_{\mathcal{A}_0} e^{-n_t E_0} + \underbrace{|\langle n' | \hat{O}_T^\dagger | 0 \rangle|^2}_{\mathcal{A}_1} e^{-n_t E_1} + \dots
 \end{aligned}$$

- For large n_t ground state dominates,

$$C(n_t) = \mathcal{A}_0 e^{-n_t E_0}$$

Find *when* ground state dominates

$$m_{\text{eff}}\left(n_t + \frac{1}{2}\right) = \ln \frac{C(n_t)}{C(n_t + 1)}$$

Effective Mass

$$m_{eff}(n_t + \frac{1}{2}) = \ln \frac{C(n_t)}{C(n_t + 1)}$$

Becomes constant and forms an
effective mass plateau
at $m_{eff} = E_0$

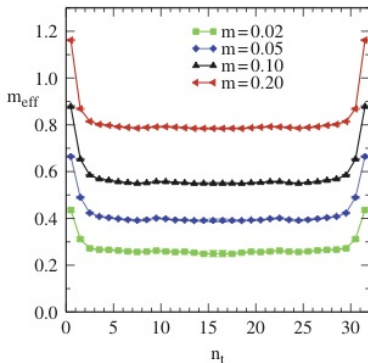


Figure: Effective mass plot of pion (in lattice units).

Each set is for a different quark mass

Analysis

Fit the data

- Determine Plateau range $[n_{min}, n_{max}]$
- Fit the data between $n_{min} \leq n_t, n'_t \leq n_{max}$ by minimizing

$$\chi^2 = \sum_{n_t, n'_t = n_{min}}^{n_{max}} (C(n_t) - f(n_t)) w(n_t, n'_t) (C(n'_t) - f(n'_t))$$

for \mathcal{A}_0 and E_0 of $f(n_t) = \mathcal{A}_0 e^{-n_t E_0}$

where $w(n_t, n'_t)$ is the weight function.

- $E_0 = m_{Hadron}$ thus, we know the mass in lattice units!