Sadece Riemann Terimli Gravitasyon Eylemi

Selin SOYSAL

İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü

Ankara YEF Günleri

2011

Özet

- Giriş
- Gravitasyon Teorileri
- Motivasyon
- Sonuç

“Connection” uzay-zamanın eğriliğinden

(Bağlantı)

$$R^{\mu}{}_{\alpha\nu\beta} = \partial_{\beta}\Gamma^{\mu}{}_{\nu\alpha} - \partial_{\nu}\Gamma^{\mu}{}_{\beta\alpha} + \Gamma^{\mu}{}_{\beta\eta}\Gamma^{\eta}{}_{\nu\alpha} - \Gamma^{\mu}{}_{\nu\eta}\Gamma^{\eta}{}_{\beta\alpha}$$

ve bükülmesinden

$$T^{\mu}{}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\mu}{}_{\beta\alpha}$$

Bükülme Tensörü

sorumludur.

Genel bir eylem fonksiyoneli;

$$S = \int d^D x \mathcal{L}(\Gamma, \partial\Gamma)$$

$$d^D x = dx^{\mu_0} \wedge dx^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_{D-1}}$$

$d^D x$ koordinat dönüşümleri altında değişimsiz değildir.

Dönüşümü bu şekilde olur;

$$d^D x = \underbrace{\left|\frac{dx}{dx'}\right|}_{J^{-1}} d^D x'$$

$d^D x$ bir tensör yoğunluğudur..

Koordinat dönüşümleri altında eylemi değişimsiz bırakmak için;

$$\int d^D x \mathcal{L}$$

Ağırlığı (+1) olan bir tensör yoğunluğu içermelidir.

$$\mathcal{L} \ni \mathrm{J}^{+1}$$

Bunu başarmak için en iyi yol bir "*tensörün determinantı*" kavramıdır:

Rank-2 bir tensör için;

$$\mathrm{Det}\left[\mathcal{R}_{\alpha\beta}\right]=\frac{1}{D!}\in^{\alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3}\in^{\beta_0\beta_1\beta_2\beta_3}\mathcal{R}_{\alpha_0\beta_0}\mathcal{R}_{\alpha_1\beta_1}\mathcal{R}_{\alpha_2\beta_2}\mathcal{R}_{\alpha_3\beta_3}$$

Bunu başarmak için en iyi yol bir “*tensörün determinantı*” kavramıdır:

Rank-4 bir tensör için;

$$
|\mathcal{R}| = \frac{1}{(D!)^2}\left[\in_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3} \in^{\mu_0\mu_1\mu_2\mu_3} \in^{\beta_0\beta_1\beta_2\beta_3} \in^{\nu_0\nu_1\nu_2\nu_3} \times \mathcal{R}^{\alpha_0}{}_{\mu_0\beta_0\nu_0} \mathcal{R}^{\alpha_1}{}_{\mu_1\beta_1\nu_1} \mathcal{R}^{\alpha_2}{}_{\mu_2\beta_2\nu_2} \mathcal{R}^{\alpha_3}{}_{\mu_3\beta_3\nu_3} \right]
$$

?

$$
where;\ |\mathcal{R}| \equiv DDet\left[\mathcal{R}^{\alpha}{}_{\mu\beta\nu}\right]
$$

Tamamen Antisimetrik Levi-Civita Sembolü

$$\hat{\in}_{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{D-1}}$$

$$\begin{cases} +1, & \alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{D-1} \ 0,1,\ldots,(\mathrm{D}-1) \text{ in çift permütasyonu} \\ -1, & \alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{D-1} \ 0,1,\ldots,(\mathrm{D}-1) \text{ in tek permütasyonu} \\ 0 & , \textit{diger} \text{ olasiliklar} \end{cases}$$

Koordinat dönüşümü dikkate alındığında;

$$\left(\text{rank\_2 bir tensör}\right)_{\alpha\beta}{}' = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\beta'}} \left(\text{rank\_2 bir tensör}\right)_{\mu\nu}$$

$$Det\left[\left(\text{rank\_2 bir tensör}\right)_{\alpha\beta}{}'\right] = \underbrace{\left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right|}_{J^{+2}} Det\left[\left(\text{rank\_2 bir tensör}\right)_{\mu\nu}\right]$$

“Değişimsiz Eylem” aşağıdaki gibi oluşturulabilir:

$$d^D x' \, Det\left[(\text{rank\_2 tensor})_{\alpha\beta}'\right]^{1/2} = d^D x Det\left[(\text{rank\_2 tensor})_{\alpha\beta}\right]$$

or

$$d^D x' \, Det\left[(\text{rank\_4 tensor})^{\mu}{}_{\alpha\nu\beta}{}'\right]^{1/4} = d^D x Det\left[(\text{rank\_4 tensor})^{\mu}{}_{\alpha\nu\beta}\right]^{1/4}$$

Gravitasyon Teorileri

Metrik Tensör, Bağlantı, Bağlantının Türevi gibi farklı gravitasyonel alan değişkenlerini temel alan bazı alternatif varyasyon ilkeleri mevcuttur..

- ✓Tamamen Metrik Formulasyonu
  - ✓(Metrik)
- ✓Metrik-Afin Formulasyonu
  - ✓(Metrik+Bağlantı)
- ✓Tamamen Afin Formulasyonu
  - ✓(Bağlantı)

Tamamen Metrik Formulasyonu; (Einstein-Hilbert)

➢*Metrik Tensör* tek dinamik değişkendir

➢Afin bağlantı, metrik tensörünün Levi-Civita bağlantısıdır.

$$\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\eta}\left(\partial_{\alpha} g_{\eta\beta} + \partial_{\beta} g_{\eta\alpha} - \partial_{\eta} g_{\alpha\beta}\right)$$

$$S_G = \int d^4x \left(Det[g]\right)^{1/2} \frac{R}{16\pi G_N}$$

➢Alan Denklemleri, eylemin metrik tensörüne göre türevi alınarak elde edilir.

$$\delta S_G = \frac{\partial S_G}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} \Longrightarrow R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0$$

Metrik-Afin Formulasyonu (Einstein-Palatini)

- *Hem metrik tensör hem de simetrik bağlantı* dinamik değişkenlerdir.

- Bağlantı metrik tensörden bağımsızdır.

$$S_G = \frac{1}{16\pi G_N}\int d^4x\left(Det[g]\right)^{1/2} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}(\Gamma)$$

Genel
Bir
Bağlantı

- Alan denklemleri, eylemin metrik tensör ve bağlantıya göre türevi alınarak eldeedilir..

$$\delta S_G = \frac{\partial S_G}{\partial g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial S_G}{\partial \Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta}}\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta}$$

Tamamen Afin Formulasyonu; (Einstein-Eddington)

- *Simetrik Bağlantı* tek dinamik değişkendir.

- Eylemin Ricci tensörüne göre türevinin alınması metrik tensörü türetir.

$$S_G = \int d^4x \left(Det\left[R_{\mu\nu}(\Gamma) \right] \right)^{1/2}$$

- Alan Denklemleri, eylemin bağlantıya göre türevinin alınmasıyla elde edilir.

$$\delta S_G = \underbrace{\frac{\partial S_G}{\partial R_{\alpha\beta}}}_{\left(|Detg|\right)^{1/2} g^{\alpha\beta}} \delta R_{\alpha\beta}$$

$$\left(|Detg|\right)^{1/2} g^{\alpha\beta} \equiv \Pi^{\alpha\beta}$$

Eğrilik tensörünü içeren uyumlu bir teori yapılandırmak mümkün mü ??

Ricci tensörünün simetrik ve antisimetrik parçalarından oluşan rank-2 bir $\mathfrak{G}_{\alpha\beta}$ tensörü tanımlayalım:

$$\mathfrak{G}_{\alpha\beta} = c_1 \mathbb{R}_{\alpha\beta} + c_2 \overline{\mathbb{R}}_{\alpha\beta} = \frac{c_1}{2} \mathbb{R}_{(\alpha\beta)} + \left(\frac{c_1}{2} + c_2 \right) \overline{\mathbb{R}}_{\alpha\beta}$$

burada;

$$\mathbb{R}_{\alpha\beta}(\Gamma) = \mathbb{R}^{\mu}_{\alpha\mu\beta}(\Gamma)$$

$$\overline{\mathbb{R}}_{\alpha\beta}(\Gamma) = \mathbb{R}^{\mu}_{\mu\alpha\beta}(\Gamma)$$

$\mathfrak{T}_{\alpha\beta}$ bükülme tensöründen indüklenmiş bir tensör alan olsun;

$$\mathfrak{T}_{\alpha\beta} = c_3 \mathbb{T}^{\mu}{}_{\mu\nu} \mathbb{T}^{\nu}{}_{\alpha\beta} + c_4 \mathbb{T}^{\mu}{}_{\mu\alpha} \mathbb{T}^{\nu}{}_{\nu\beta} + c_5 \mathbb{T}^{\mu}{}_{\nu\alpha} \mathbb{T}^{\nu}{}_{\mu\beta}$$

Tüm bunların ışığında Lagrangian;

$$\mathfrak{L}_{\mathtt{tot}} = c_G \left(\mathtt{Det}\left[\mathfrak{G}\right]\right)^{1/2} + c_T \left(\mathtt{Det}\left[\mathfrak{T}\right]\right)^{1/2} + c_R \overline{M}_D^{D/2} \left(\mathtt{DDet}\left[\mathfrak{R}\right]\right)^{1/4}$$

burada

Afin Bağlantı

Temel Değişken..

$$\mathfrak{R}^{\mu}_{\alpha\nu\beta} = c_6 \mathbb{R}^{\mu}_{\alpha\nu\beta} + c_7 \mathbb{W}^{\mu}_{\alpha\nu\beta}$$

Maksimal simetrik bir uzay-zaman için

toplam eylem bu formu alır:

$$\mathrm{S_{tot}} = \int d^D x \,(\mathtt{Det}\,[g])^{1/2} \left\{ \bar{c}_E \kappa^{D/2} + \bar{c}_I \overline{M}_D^{D/2} \kappa^{D/4} \right\}$$

E-H eylemi ile karşılaştırırsak;

$$\mathrm{S_{EH}} = \int d^D x \,(\mathtt{Det}\,[g])^{1/2} \frac{1}{2} \overline{M}_D^{D-2} \kappa$$

$$S_{tot} = \int d^D x \mathcal{L}_{tot}(\Gamma, \partial\Gamma)$$

Eylemin Afin bağlantı ve Riemann Eğrilik Tensörüne göre varyasyonunu alırsak;

$$\delta \mathrm{S}_{\mathtt{tot}} = \int d^D x \, \left(\mathfrak{Q}_{\mu}{}^{\alpha\nu\beta} \delta \mathbb{R}^{\mu}_{\alpha\nu\beta} + \mathfrak{W}_{\mu}{}^{\alpha\beta} \delta \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \right) = 0$$

Yeni bir nicelik

$$\frac{\partial \mathfrak{L}_{\mathtt{tot}}}{\partial \mathbb{R}^{\mu}_{\alpha\nu\beta}}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{L}_{\mathtt{tot}}}{\partial \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}}$$

Hipermomentum

Hareket denklemi;

$$\underbrace{\nabla^{\Gamma}_{\nu}\mathfrak{Q}_{\mu}{}^{\alpha\nu\beta}}_{\text{Homojen Kısım}} \underbrace{+ \mathbb{T}^{\alpha}_{\sigma\nu}\mathfrak{Q}_{\mu}^{\sigma\nu\beta} - \frac{1}{2}\mathbb{T}^{\beta}_{\nu\sigma}\mathfrak{Q}_{\mu}^{\alpha\nu\sigma} + \mathbb{T}^{\sigma}_{\mu\nu}\mathfrak{Q}_{\sigma}^{\alpha\nu\beta}}_{\text{Homojen Olmayan Kısım}} = \mathfrak{W}_{\mu}{}^{\alpha\beta}$$

Hareket denkleminin homojen kısmının çözümü;

$$\nabla^{\Gamma}_{\nu} \mathfrak{Q}^{(0)}{}_{\mu}{}^{\alpha\nu\beta} = 0$$

$$\mathfrak{Q}^{(0)}{}_{\mu}{}^{\alpha\nu\beta} = \boxed{\Lambda^{(0)}} \sqrt{-g} \left(\delta^{\nu}_{\mu} g^{\alpha\beta} - \delta^{\beta}_{\mu} g^{\alpha\nu} \right)$$

Boyutlu bir parametre

Bu denklemlerin ışığında Riemann ve Weyl Tensörleri arasında şöyle bir ilişki olmasını bekleriz;

$$\mathbb{R}^{\mu}_{\alpha\nu\beta} = -\frac{c_7}{c_6}\mathbb{W}^{\mu}_{\alpha\nu\beta} + \boxed{\mathfrak{T}^{\mu}_{\alpha\nu\beta}}$$

$$\mathfrak{T}^{\mu}_{\alpha\nu\beta} = \frac{1}{M_P^2}\boxed{t^{\mu}_{\alpha\nu\beta}}$$

?

Riemann Tensörü ile aynı simetrilere sahip bir tensör alan

$t^{\mu}_{\alpha\nu\beta}$ tensörünü tanımlamak için metrik tensörünün yanında simetrik bir tensör daha tanımlamamız gerekmektedir.

$$t^{\mu}_{\alpha\nu\beta} = t^{\mu}_{\alpha\nu\beta}\left(g, \boxed{\mathcal{T}}\right)$$

?

$\mathcal{T}_{\alpha\beta}$ nın fiziksel olarak anlamı nedir ??

$$
\begin{aligned}
t^{\mu}_{\alpha\nu\beta} &= \frac{1}{D-2}\left(\delta^{\mu}_{\nu}\mathcal{T}_{\alpha\beta} - \delta^{\mu}_{\beta}\mathcal{T}_{\nu\alpha} - g_{\alpha\nu}\mathcal{T}^{\mu}_{\beta} + g_{\alpha\beta}\mathcal{T}^{\mu}_{\nu}\right) \\
&- \frac{1}{(D-1)(D-2)} g_{\lambda\rho}\mathcal{T}^{\lambda\rho}\left(\delta^{\mu}_{\nu} g_{\alpha\beta} - \delta^{\mu}_{\beta} g_{\nu\alpha}\right)
\end{aligned}
$$

Einstein alan denklemleri ile karşılaştırırsak;

$$\mathcal{T}_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta} - \frac{1}{D-2} g_{\alpha\beta} g^{\mu\nu} \boxed{T_{\mu\nu}}$$

Madde, radyasyon ve vakumun korunumlu Stres-Enerji Tensorü

Denklemde yerine yerleştirirsek;

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}^{\mu}_{\alpha\nu\beta} =& \frac{1}{D-2}\left(\delta^{\mu}_{\nu}T_{\alpha\beta} - \delta^{\mu}_{\beta}T_{\nu\alpha} - g_{\alpha\nu}T^{\mu}_{\beta} + g_{\alpha\beta}T^{\mu}_{\nu}\right) \\ -& \frac{2}{(D-1)(D-2)}g_{\lambda\rho}T^{\lambda\rho}\left(\delta^{\mu}_{\nu}g_{\alpha\beta} - \delta^{\mu}_{\beta}g_{\nu\alpha}\right)\end{aligned}$$

- $$\mathbb{R}_{\alpha\beta} = \frac{1}{\overline{M}_D^2}\mathcal{T}_{\alpha\beta}$$

- $$\mathcal{T}_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta} - \frac{1}{D-2} g_{\alpha\beta} g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$$

- $$\overline{\mathbb{R}}_{\alpha\beta} = 0$$

- ✓ Gravitasyonel alan denklemleri, dinamik, tensörel Riemann tensör denkleminden türetilir.
- ✓ E-E teorisi, D=4 boyuta genelleştirilmiş olur.

Teşekkür ederim..

Einstein Equations from Riemann-only Gravitational Action
arXiv:1105.4750v3 [hep-th]

- Durmuş Ali DEMİR
- Tonguç RADOR
- Oktay DOĞANGÜN