Birinci Sınıf Bağlar Ayar Dönüşümlerinin Jeneratörleri midir?

Mehmet Kemal Gümüş

Hacettepe Üniversitesi Fizik Mühendisliği Bölümü

14 Şubat 2015

Birinci Sınıf Bağlar Ayar Dönüşümlerinin Jeneratörleri midir?

1. Bağlı Sistemler İçin Dirac Kanonik Kuantizasyon Yöntemi
2. Yang-Mills Alanlarının Dirac Yöntemiyle Kuantizasyonu
3. Kuantum Noether Teoremi ve Yük Cebiri
4. Bağlı Sistemler İçin Faddeev - Jackiw Kuantizasyon Yöntemi
5. Yang-Mills Alanlarının Faddeev Jackiw Yöntemiyle Kuantizasyonu

- Lagranjiyenden Hamiltonyene Legendre dönüşümü

$$p_i = \frac{\delta L}{\delta \dot{q}^i} \qquad H = p_i \dot{q}^i - L(q, \dot{q})$$

- Bu dönüşümün tersinir olabilmesi için

$$det\left(\frac{\delta^2 L}{\delta \dot{q}^i \delta \dot{q}^j}\right) \neq 0$$

olması gerekir

Bağlı Sistemler İçin Dirac Kanonik Kuantizasyon Yöntemi

- $\frac{\delta^2 L}{\delta \dot{q}^i \delta \dot{q}^j}$ matrisinin rankı R ise; N boyutlu bir sistemde $R < N$ olduğu durumda $N - R = M$ tane birincil bağ koşulu vardır.
- Bu bağ koşulları:

$$\phi_m \equiv p_m - g_m(q,p) = 0, \quad m = 1, \ldots, M$$

sistemin faz uzayını $2N - M = N + R$ boyutlu bir Γ_C hiper yüzeyine indirger.

- F ve G gibi iki dinamik değişken sadece faz uzayındaki bir hiper yüzeyi üzerinde birbirlerine eşitse bu iki nicelik birbirlerine zayıf-eşittir denir.

$$F - G|_{\Gamma_C} = 0 \Rightarrow F \approx G$$

- Bu durumda bağ koşulları:

$$\phi_m \equiv p_m - g_m(q,p) \approx 0, \quad m = 1, \ldots, M$$

- Artık bu sistem için Hamiltonyen tek (unique) bir biçimde yazılamaz. Bağ koşullarının lineer kombinasyonları da Hamiltonyene eklenebilir. (u^m: Lagrange çarpanları)

$$H_p = H + u^m \phi_m$$

- Hamilton hareket denklemleri ise:

$$\dot{q}_i \approx \frac{\delta H_p}{\delta p^i} \qquad \dot{p}_i \approx -\frac{\delta H_p}{\delta q^i}$$

- $\phi_m \approx 0$ olduğu için bağ koşullarının tutarlılık şartları:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_m &\approx \{\phi_m, H_p\} \\ &\approx \{\phi_m, H\} + u^n \{\phi_m, \phi_n\} \\ &\approx 0 \equiv h_m + C_{mn} u^n \approx 0 \end{aligned}$$

- $det\left(C_{mn}\right) \not\approx 0$ ise u^m Lagrange çarpanları: $u^n \approx -h_m \left(C^{-1}\right)^{mn}$ şeklinde belirlenebilir.
- $det\left(C_{mn}\right) \approx 0$ ise bu matrisin rankı $R < M$ ise K_1 tane yeni (*ikincil*) bağ koşulu ortaya çıkar:

$$\phi_k \approx 0, \quad k = 1, \ldots, K_1$$

- Bu yeni ikincil bağ koşulları sistemi daha düşük boyutlu yeni bir hiper yüzeyle sınırlar. Bu yeni hiper yüzey üzerinde birincil ve ikincil bağ koşullarının tutarlılık şartları sınanır.

- Bu algoritma en küçük boyutlu bağ yüzeyi ve tüm bağ koşulları için tutarlılık şartları yazılıp bütün (K tane) bağ koşulları (*birincil, ikincil, üçüncül...*) belirleninceye dek sürdürülür.

$$\phi_j \approx 0, \quad j = 1, \ldots, M + K = J$$

- Sistemde J tane bağ koşulu olduğunda genişletilmiş Hamiltonyen v^j gelişi güzel katsayılar olmak üzere

$$H_E \equiv H + v^j \phi_j$$

olarak tanımlanır.

- Bağ koşulları için yeni bir sınıflandırma:
  - Bir ϕ_i bağ koşulu diğer tüm ϕ_j bağ koşullarıyla Poisson parantezleri sıfıra zayıf-eşitse bu bağ koşulu birinci sınıf bağ koşulu olarak adlandırılır:

$$\{\phi_i, \phi_j\} \approx 0, \qquad i = 1, \ldots, I$$

  - Geriye kalan $S = J - I$ tane bağ koşulu ise ikinci sınıf bağ koşulu olarak adlandırılır:

$$\chi_\alpha \approx 0, \qquad \alpha = 1, \ldots, S$$

- İkinci sınıf bağ koşullarının inşa ettiği $\Delta_{\alpha\beta} \equiv \{\chi_\alpha, \chi_\beta\}$ matrisi anti-simetriktir ve bağ yüzeyi üzerinde singüler değildir (S çift).

$$det\,(\Delta_{\alpha\beta})|_{\Gamma_C} \neq 0$$

- İkinci sınıf bağ koşullarının tutarlılık şartları v^α'lar için çözülebilir:

$$\dot{\chi}_\alpha \approx \{\chi_\alpha, H_E\} = \{\chi_\alpha, H\} + v^\beta \{\chi_\alpha, \chi_\beta\}$$

Bağlı Sistemler İçin Dirac Kanonik Kuantizasyon Yöntemi

- Sistem kuantize edildiğinde Poisson parantezleri, kuantum komütatörlere denk gelir:

$$i\{F,G\} \to [F,G]$$

- Birinci sınıf bağ koşulları için

$$\{\phi_1,\phi_2\} \approx 0 \longrightarrow \left[\hat{\phi}_1,\hat{\phi}_2\right]|\psi\rangle = 0$$

- Eğer sistemde ikinci sınıf bağ koşulları varsa, Poisson parantezleri yerine Dirac parantezleri tanımlanır:

$$\{F,G\}_D \equiv \{F,G\} - \{F,\chi_\alpha\}\Lambda^{\alpha\beta}\{\chi_\beta,G\} \qquad \Lambda^{\alpha\beta} \equiv \left(\Delta^{-1}\right)^{\alpha\beta}$$

Bağlı Sistemler İçin Dirac Kanonik Kuantizasyon Yöntemi

- Bir faz uzayı fonksiyonunun ikinci sınıf bağ koşullarıyla Dirac parantezi:

$$\begin{aligned}\{F,\chi_\alpha\}_D &= \{F,\chi_\alpha\} - \{F,\chi_\gamma\}\,\Lambda^{\gamma\beta}\underbrace{\{\chi_\beta,\chi_\alpha\}}_{\Delta_{\beta\alpha}} \\ &= \{F,\chi_\alpha\} - \{F,\chi_\gamma\}\,\delta^\gamma_\alpha = 0\end{aligned}$$

- Dirac parantezleri bilinen Poisson parantezleri ile aynı sonuçları verir.

$$\{F,H\}_D = \{F,H\} - \{F,\chi_\alpha\}\,\Lambda^{\alpha\beta}\{\chi_\beta,H\} \approx \{F,H\}$$

- Saf Yang-Mills Lagranjiyeni:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu a}$$

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu$$

- Alanların hareket denklemleri:

$$\mathfrak{D}_\mu F^{\mu\nu a} = \partial_\mu F^{\mu\nu a} + f^{abc} A^b_\mu F^{\mu\nu c} = 0$$

- Bianchi Özdeşliği:

$$\mathfrak{D}_\mu \tilde{F}^{\mu\nu a} = 0$$

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\sigma\rho} F_{\sigma\rho}$$

- A^a_μ alanları için kanonik momentumlar ise

$$\Pi^{\mu a}(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_0 A^a_\mu\right)} = -F^{0\mu} \begin{cases} \Pi^{0a} = -F^{00a} = 0 & \mu = 0 \\ \Pi^{ia} = -F^{0ia} = E^{ia} & \mu = i \end{cases}$$

- $\varphi_1 = \Pi^{0a} = 0$ sistemin birinci sınıf bağ koşuludur.
- Sistemin kanonik Hamiltonyeni ve birincil Hamiltonyeni ise

$$\mathcal{H}_{can} = \frac{1}{2}\left(\Pi^a_i \Pi^{ia} + B^a_i B^{ia}\right) - \Pi^{a\,i}_i \mathfrak{D}^{i,ab} A^b_0$$

$$H_p = H_{can} + \int d^3x \lambda_1 \varphi_1$$

- φ_1 için tutarlılık şartı ikincil bağ koşulu üretir:

$$\{\Pi^{0a}, H_p\} = -\mathfrak{D}_i^{ab}\Pi^{i,b} \approx 0$$

$$\varphi_2 = \mathfrak{D}_i^{ab}\Pi^{ib} \approx 0$$

- İkincil Hamiltonyen:

$$H_S = H_{can} + \int d^3x\lambda_1\phi_1 + \int d^3x\lambda_2\phi_2$$

- İkincil bağ koşulu için tutarlılık şartı:

$$\dot{\varphi}_2 \approx \{\mathfrak{D}_i\Pi^{ia}, H_S\} \approx 0$$

- Algoritma sonlanmasına karşın sistemdeki Lagrange çarpanları belirlenemedi. Bu durumda sistemin bağ koşullarını ikinci sınıf bağ koşullarına dönüştürecek ayar sabitleme denklemleri (örneğin Coloumb Ayarı) eklenir

$$\begin{aligned} \chi^1(x) &\equiv A^0(x) \approx 0 \\ \chi^2(x) &\equiv \mathfrak{D}_i A^i(x) \approx 0 \end{aligned}$$

- Teorinin tüm bağ koşulları belirlendi:

$$\phi_1 \equiv \varphi^1,\ \phi_2 \equiv \varphi^2,\ \phi_3 \equiv \chi^1,\ \phi_4 \equiv \chi^2$$

- Bu bağ koşullarının oluşturduğu Δ_{ij} matrisi ve onun tersi Λ^{ij}:

$$\begin{aligned}\Delta_{ij}(x,y) &= \left.\{\phi_i(x),\phi_j(y)\}\right|_{x_0=y_0}\\ &= \begin{pmatrix}0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\nabla_x^2\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \nabla_x^2 & 0 & 0\end{pmatrix}\delta^3(\vec{x}-\vec{y})\end{aligned}$$

$$\Lambda^{ij}(x,y) = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \nabla_x^{-2}\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\nabla_x^{-2} & 0 & 0\end{pmatrix}\delta^3(\vec{x}-\vec{y})$$

- Teorinin Dirac Komütatörleri Sırayla:

$$\left[A_\mu^a(x), A_\nu^b(y)\right]_D\Big|_{x_0=y_0} = 0 = \left[\Pi_\mu^a(x), \Pi_\nu^b(y)\right]_D\Big|_{x_0=y_0}$$

$$\begin{aligned}\left[A_\mu^a(x), \Pi^{\nu,b}(y)\right]_D\Big|_{x_0=y_0} &= i\delta_{ab}\left(\delta_i^j - (\partial_x)_i \frac{1}{\nabla_x^2}(\partial_x)^j\right)\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \\ &= i\delta_{ab}\delta_{i\,(tr)}^j(\vec{x}-\vec{y})\end{aligned}$$

- Burada hesaplamaları yeniden yapmadan Abelian sonuçlar, Yang-Mills Teorisindeki $SU(N) \to U(1)$ dönüşümü $SU(N)$ gruplarının yapı sabitleri $f^{abc} \to 0$ alınarak bulunabilir.

Yang-Mills Alanları İçin Kuantum Noether Teoremi ve Yük Cebiri

- Dirac metodunda birinci sınıf bağ koşullarının tutarlılık şartları:

$$\dot{\phi}_j \approx \{\phi_j, H\} + u^m \{\phi_j, \phi_m\} \quad j = 1, \ldots, J = M + K \quad m = 1, \ldots, M$$

u^m: Lagrange çarpanları

- Bu eşitlik u^m'ler için J tane homojen olmayan lineer denklem olarak düşünülebilir. Bu durumda u^m'ler için genel çözüm:

$$u^m \approx U^m(q, p) + v^a V_a^m(q, p) \quad a = 1, \ldots, A$$

  - U^m: homojen olmayan kısmın çözümleri
  - V_a^m: homojen kısmın çözümleri
  - v^a: gelişi güzel katsayılar

- Herhangi bir faz uzayı niceliğinin bağ yüzeyi üzerindeki hareket denklemi:

$$\begin{aligned} \dot{F} &\approx \{F, H\} + u^m \{F, \phi_m\} \\ &\approx \{F, H_p\} \end{aligned}$$

$$H_p = \underbrace{H + U^m \phi_m}_{H'} + v^a \underbrace{V_a^m \phi_m}_{\phi_a}$$

- Eğer dikkatimizi ayar simetrisine çevirirsek H_p'de gelişi güzel v^a katsayılarının olması fiziksel bir durumun sonsuz farklı durum uzayları ile ifade edilebileceğini gösterir (Ayar Serbestisi).
- Buna göre $F(0)$ başlangıç durumuna sahip bir fiziksel niceliğin zamanla değişimini sonsuz farklı şekilde gösterebiliriz.

- v^a'nın iki özel seçimi için sırayla v_1^a ve v_2^a olmak üzere çok küçük bir δt süresi için F'in değişimi:

$$\begin{aligned} F_1(\delta t) &= F(0) + \{F, H_p\}\,\delta t \\ &= F(0) + \left[\left\{F, H'\right\} + v_1^a\,\{F, \phi^a\}\right]\delta t \\ F_2(\delta t) &= F(0) + \{F, H_p\}\,\delta t \\ &= F(0) + \left[\left\{F, H'\right\} + v_2^a\,\{F, \phi^a\}\right]\delta t \end{aligned}$$

- F'nin $t = \delta t$ anındaki iki değeri arasındaki fark:

$$\begin{aligned} \Delta F(\delta t) = F_1(\delta t) - F_2(\delta t) &= \delta t\,(v_1^a - v_2^a)\,\{F, \phi^a\} \\ &\equiv \mu^a\,\{F, \phi^a\} \end{aligned}$$

μ^a: infinitesimal gelişi güzel bir sayı

- Bu dönüşüm (infinitesimal) ayar dönüşümü olarak adlandırılır. Yukarıdaki iki hareket denklemi de aynı fiziksel sonucu verir. Yani birincil birinci sınıf bağ koşulları ayar dönüşümlerinin jeneratörü olur.
- Benzer şekilde ikincil birinci sınıf bağ koşullarının da ayar dönüşümlerinin jeneratörü olabileceği gösterilebilir.

$$\begin{aligned} F_1 &= F(0) + \mu^a \{F, \phi_a\} \\ F_{12} &= F_1 + v^{a'} \{F_1, \phi_{a'}\} \\ &= F(0) + \mu^a \{F, \phi_a\} + v^{a'} \{F + \mu^a \{F, \phi_a\}, \phi_{a'}\} \end{aligned}$$

- Aynı dönüşümü ters sırayla yapsaydık:

$$F_{21} = F(0) + v^{a'} \{F, \phi_{a'}\} + \mu^a \left\{F + v^{a'} \{F, \phi_{a'}\}, \phi_a\right\}$$

- F_{12} ile F_{21} arasındaki fark:

$$\begin{aligned}\Delta F = F_{21} - F_{12} &= \mu^a v^{a'} \left[\{\{F,\phi_{a'}\},\phi_a\} - \{\{F,\phi_a\}\phi_{a'}\}\right] \\ &= \mu^a v^{a'} \{F,\{\phi_{a'},\phi_a\}\}\end{aligned}$$

- $\{\phi_{a'},\phi_a\}$ bu ayar dönüşümünün jeneratörüdür ve sıfıra zayıf-eşittir. Dolayısıyla birinci sınıf bağ koşulları kümesinin kapalılık özelliği gereği bu Poisson parantezi, birinci sınıf bağ koşullarının lineer kombinasyonuna kuvvetli-eşittir.

$$\{\phi_{a'},\phi_a\} = \lambda_{a'a}^{a''}\phi_{a''}$$

- Böylece birincil veya ikincil tüm birinci sınıf bağ koşulları ayar dönüşümlerinin jeneratörü olabildiği gösterilmiş olur.

Ayar Alanları İçin Kuantum Noether Teoremi ve Yük Cebiri

- Klasik $A_\mu = g\frac{\tau^a}{2i}A^a_\mu$ alanları, $\lambda = g\frac{\tau^a}{2i}\lambda^a$ olmak üzere $U = e^\lambda$ şeklinde parametrize edilen Abelyen olmayan dönüşümler altında dönüşüm kuralı:
$$A'_\mu = UA_\mu U^{-1} - (\partial_\mu U)\, U^{-1}$$
- Eğer dönüşüm infinintesimal olarak yapılırsa $(\lambda \to \delta\lambda)$
$$A'_\mu = A_\mu - \mathfrak{D}_\mu (\delta\lambda)$$
olur. Burada
$$\mathfrak{D}_\mu \equiv \partial_\mu + [A_\mu,$$
kovaryant türevin adjoint temsildeki gösterimidir.

Ayar Alanları İçin Kuantum Noether Teoremi ve Yük Cebiri

- Ayar alanları kuantize edildiğinde ($A_\mu \to \mathbb{A}_\mu$) kuantum alan operatörünün beklenen değerinin dönüşümünün klasik alanın dönüşümü ile aynı sonucu vermesi beklenir. Bu durumda dönüşüm kuralı:

$$(\mathbb{A}_\mu)' = \mathbb{U}^{-1}\mathbb{A}_\mu\mathbb{U}$$

  şeklinde olur.
- Klasik Alan Kuramı'ndaki Noether Teoremi, Kuantum Alan Kuramı'na taşındığında korunumlu Q Noether yükünün kuantum bölgesinde simetrilerin jeneratörü olması beklenir. Yani $\mathbb{U} = e^{iQ}$ şekilde parametrize edilir ve sonsuz küçük dönüşümler için

$$\mathbb{A}_\mu + i\left[\mathbb{A}_\mu, \delta Q\right] \overset{?}{\longleftrightarrow} \mathbb{A}_\mu - \mathfrak{D}_\mu \delta\lambda$$

  sağlanması gerekir.

Ayar Alanları İçin Kuantum Noether Teoremi ve Yük Cebiri

- Yang-Mills alanlarının Abelyen olmayan dönüşümler altındaki değişmezliğine karşı gelen Noether akımı ve Noether yükü sırasıyla:

$$\delta J^{\mu} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta\left(\partial_{\mu} A_{\nu}^{a}\right)} \delta A_{\nu}^{a} = -F^{\mu\nu,a}\left(\mathfrak{D}_{\nu}\delta\lambda\right)^{a}$$

$$\delta Q = \int d^{3}x \delta J^{0} = -\int d^{3}x F^{0\nu,a}\left(\mathfrak{D}_{\nu}\delta\lambda\right)^{a} = \int d^{3}x \Pi^{\nu,a}\left(\mathfrak{D}_{\nu}\delta\lambda\right)^{a}$$

şeklindedir.

- Yang - Mills alanları için eş zamanlı kanonik kuantizasyon bağıntısı:

$$\left.\left[A_{\mu}^{a}(x), \Pi_{\nu}^{b}(y)\right]\right|_{x_0=y_0} = i\delta_{b}^{a}\delta_{\nu}^{\mu}\delta^{3}\left(\vec{x}-\vec{y}\right)$$

şeklindedir. Dolayısıyla;

$$\left[\mathbb{A}_{\mu}, \delta Q\right] = i\mathfrak{D}_{\mu}\lambda$$

bulunur.

- Gerçekten δQ yükünün Abelyen olmayan dönüşümlerin jeneratörü olduğu kanıtlanmış olur.
- Noether yüküne kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\delta Q = \int d^3x \delta J^0 \quad = \quad -i \int d^3x \left(\mathfrak{D}_\nu \Pi^\nu\right)^a \delta\lambda^a$$

  olduğu görülebilir.
- Yani infinitesimal $\delta\lambda$ parametreli ayar dönüşümünün jeneratörü Dirac kuramında ikincil birinci sınıf bağ koşuludur.
- Bu da genelleştirilmiş Gauß Yasasıdır:

$$G^a = \mathfrak{D}_\nu^{ab} \Pi^{\nu,b}$$

Bağlı Sistemler İçin Faddeev - Jackiw Kuantizasyon Yöntemi

- Dirac metoduna alternatif
- Dirac metoduna nazaran daha ekonomik ve basit bir yöntem
- Bu yöntemde Hamilton formalizmindeki momentumlar, Lagranjiyen formalizmine yeni koordinatlar olarak taşınır.
- Dirac metodunda bağ koşulları sınıflandırılırken Faddeev-Jackiw metodunda böyle bir sınıflandırma yoktur.

Bağlı Sistemler İçin Faddeev - Jackiw Kuantizasyon Yöntemi

- Metodun başlangıç noktası: birinci mertebeden zaman türevleri içeren Lagranjiyen inşa etmek
- $n$boyutlu bir sistemin konfigürasyon uzayı momentumların eklenmesiyle $2n$ boyuta katlanır.
- p_i ve q^i, ξ^i konfigürasyon uzayı değişkenleri olarak genelleştirilir
- Faz uzayındaki p_i'lere karşılık gelen $\xi_{(p_i)}$'lerin zamana bağlı türevleri Faddeev-Jackiw Lagranjiyeninde yoktur.

- Hamiltonyen, Lagranjiyendenters Legendre dönüşümü ile dönüştürülerek elde edilir:

$$L(\xi) = a_i(\xi)\,\dot{\xi}^i - V(\xi)$$

- Hamiltonyen:

$$\begin{aligned} H &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^i}\dot{\xi}^i - L = a_i\dot{\xi}^i - \left[a_i(\xi)\,\dot{\xi}^i - V(\xi)\right] \\ &= V(\xi) \end{aligned}$$

Bağlı Sistemler İçin Faddeev - Jackiw Kuantizasyon Yöntemi

- Vektör potansiyel $a_i(\xi) \equiv \frac{1}{2}\xi^j w_{ji}$'nin olduğu durumda
  - w_{ji} anti-simetrik sabit bir matristir.
  - w_{ij}'nin simetrik kısımlar zamanın tam türevlerini içerdiğinden Lagranjiyene katkı vermezler
- Euler-Lagrange denklemleri:

$$f_{ij}\dot{\xi}^j = \frac{\partial V}{\partial \xi^i} = \frac{\partial H}{\partial \xi^i}$$

$$f_{ij} \equiv \frac{\partial}{\partial \xi^i} a_j - \frac{\partial}{\partial \xi^j} a_i$$

- $f^{ij} \equiv \left(f^{-1}\right)_{ij}$ olmak üzere

$$\dot{\xi}^j = f^{ij} \frac{\partial H}{\partial \xi^i}$$

- Burada iki durum söz konusudur:
  - $det\left(f_{ij}\right) \neq 0$ ise $\dot{\xi}^{i}$'ler için hareket denklemleri çözülebilir.
  - $det\left(f_{ij}\right) = 0$ ise w'nın $M < N = 2n$ tane z_m sıfır öz vektörü vardır ve M tane denklem zaman türevleri içermez:

$$z_m^i \frac{\partial}{\partial \xi^i} H\left(\xi\right) = 0, \qquad m = 1, \ldots, M$$

  - z_m'in kapsadığı ortogonal uzayda f_{ij} matrisinin 2n boyutlu bir ters matrisi vardır. Bu durumda $N' = 2n + M$ olur.

- $det\left(f_{ij}\right) \neq 0$ durumu yani f_{ij}'nin tersinin olduğu durum ele alınırsa

$$\dot{\xi}^{j} = f^{ij}\frac{\partial H}{\partial \xi^{i}} = \left\{\xi^{j}, H\right\} \rightarrow \frac{1}{i}\left[\xi^{j}, H\right] = \frac{1}{i}\left[\xi^{j}, \xi^{i}\right]\frac{\partial H}{\partial \xi^{i}}$$

- Daha genel olarak:

$$\left[A\left(\xi\right), B\left(\xi\right)\right] = \frac{1}{i}\frac{\partial A}{\partial \xi^{i}} f^{ij} \frac{\partial B}{\partial \xi^{j}}$$

- f_{ij} Darboux dönüşümü sayesinde sabit bir anti simetrik matrisle tasvir edilebilir:

$$a_i\left(\xi\right) = \frac{1}{2} Q^k\left(\xi\right) w_{kl} \frac{\partial Q^l}{\partial \xi^i}$$

$$f_{ij} = \frac{\partial Q^k}{\partial \xi^i} w_{kl} \frac{\partial Q^l}{\partial \xi^j}$$

- Bu yeni koordinatları kanonik yapmak için w_{ij} Gram-Schmidt yöntemi ile anti simetrik blok diagonal bir forma sokulabilir

$$w_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

- $det\left(f_{ij}\right)=0$ yani f_{ij} singülerse Darboux dönüşümleri f_{ij}'nin en büyük ranka sahip singüler olmayan alt matrisi için uygulanabilir ve böylece w_{ij}'nin daha küçük boyutlu olduğu bir kinetik terim elde edilir.
- Bağlı $z_m\left(\xi\right),\ m=1,\ldots,M$ koordinatları Hamiltonyenin içine taşınır.

$$L=\frac{1}{2}\xi^i w_{ij}\dot{\xi}^i-H\left(\xi,z\right)$$

- Bu durumda bağlı z_m koordinatlar için Euler-Lagrange denklemleri

$$\frac{\partial H\left(\xi,z\right)}{\partial z_m}=0$$

- Bu Euler-Lagrange denklemleri z_m'ler için çözülürse sistemin gerçek bağ koşulları $\phi^k(\xi)$'lar elde edilir ve bu çözümler Lagranjiyen'e yerleştirilir
$$L = \frac{1}{2}\xi^i w_{ij}\dot{\xi}^j - H'(\xi) - z_k\phi^k$$
- Bu birbirinden bağımsız ξ'lerin sayısını azaltır.
- Bu ϕ^k'lar Lagranjiyen'e eklendiğinde: $a_i(\xi) \to a_i'(\xi)$
- Bu yeni vektör potansiyeli de kanonik forma sokmak için Darboux dönüşümü uygulanır.
- Bu prosedür yeni bağ koşulları üretmeyen indirgenmiş bir kanonik sistem yani indirgenmiş bir Lagranjiyen elde edilene kadar sürdürülür.

Yang-Mills Alanlarının Faddeev Jackiw Yöntemiyle Kuantizasyonu

- Yang-Mills Lagrangian'i $\Pi^{\mu,a} \equiv -F^{0\mu,a}$ ve $\Pi^{0,a} = 0$ olmak üzere:

$$L = \int d^3x \left\{ \Pi^i \cdot \dot{A}_i - \underbrace{\frac{1}{2}\left[\left(\Pi^{i,a}\right)^2 + \left(B^{i,a}\right)^2\right] + \mathfrak{D}_i^{ab}\Pi^{i,b}A_0^a}_{\mathcal{H}} \right\}$$

- $A^{0,a}$ simplektik kısımda olmadığı için

$$\frac{\partial H(\xi, z)}{\partial z_m} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\delta H}{\delta A_0^a} = \mathfrak{D}_i^{ab}\Pi^{i,b} = 0$$

Yang-Mills Alanlarının Faddeev Jackiw Yöntemiyle Kuantizasyonu

- Bunu çözmek için $\Pi^{i,a}$ ve $A^{i,a}$ enine (transverse) ve boyuna (longitudial) bileşenlerine ayrılır ve Lagrangian'da yerine yerleştirilirse:

$$\Pi^{i,a} = \Pi_T^{ia} + \frac{\partial_i}{\sqrt{-\nabla^2}}\Pi^a$$

$$A^{i,a} = A_T^{ia} + \frac{\partial_i}{\sqrt{-\nabla^2}}A^a$$

$$L = \int d^3x \left\{ \Pi_T^{i,a} \dot{A}_T^{i,a} - \frac{1}{2}\left[\left(\Pi_T^{i,a}\right)^2 + \left(B^{i,a}\right)^2 \right] \right\}$$

- Simplektik kısımda artık bağlı bir koordinat kalmadığı için:

$$w_{ij}^{ab} = \frac{1}{i}\left[\Pi_{i,T}^{a}(x), A_{j,T}^{b}(y)\right] = i\delta_b^a \delta_j^i \delta^4(x-y)$$

yazılabilir ve böylece kuantizasyon yapılabilir.

P.A.M. Dirac, Lectures on Quantum Mechanics, (Yeshiva University Press, New York, 1964)

R. Jackiw, (Constrained) Quantization Without Tears, arXiv:hep-th/930675v1, 1993

N.K. Pak, Introduction to Instatons in Yang-Mills Theory, ICTP Lecture Notes, IC/80/17, Trieste, Italy, 1980

İ.Turan, The Faddeev-Jackiw Quantization of the U(1) Gauged SU(2) WZW Model,(Graduate School of Natural and Applied Sciences, METU Master Thesis) 1999

Bağlı Sistemlerde Birinci Sınıf Bağlar Ayar Dönüşümlerinin Jeneratörleri midir?

Yardımları ve rehberlikleri için Sayın Prof. Namık K. Pak'a ve Prof. Müge Boz'a

ve beni dinlediğiniz için sizlere

Teşekküler