Yer Değiştirmeyen Ayar Teorileri ve Seiberg–Witten Haritası

Kayhan ÜLKER

Abbasağa Mah.

Ankara YEF Günleri, 27 Aralık 2011

Jargon :

- İngilizce : Non–commutative
- Yarı Türkçe : Komüt etmeyen
- Türkçe : Yer değiştirmeyen (?)

Uzay-zamanın yer değiştirmemesi kavramı

- Klasik mekanik faz uzayının, geometrik bir teorisi olarak düşünülebilir. Faz uzayında bir olayın durumu koordinatları (x, p) olan bir noktadır !
- Kuantum mekaniğinde ise Heisenberg belirsizlik ilişkisinden dolayı

$$\Delta x \Delta p \geqslant \frac{\hbar}{2}$$

faz uzayında bir nokta kavramından bahsedilemez !

- Kuantum mekaniğinde x ve p artık

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$

yer değiştirme bağıntısını sağlayan yani *"komüt-etmeyen"* operatörlerdir

- Uzay-zaman için bir komüt etmeme bağıntısı olsa nasıl olur?

- Örneğin, en basit yer değiştirmeyen D–boyutlu Minkowski veya Euclidean uzay $\mathbb{R}^D$ için

$$[\hat{x}^\mu , \hat{x}^\nu] = i\theta^{\mu\nu}$$

  yazılabilir. Burada θ reel sabit antisimetrik bir parametredir.

- Heisenberg belirsizlik ilkesine benziyor : bir parçacığın konumunu birden fazla koordinat için aynı anda ölçmek mümkün değil !

Dolayısıyla bu fikir çok da yeni ve çılgınca bir fikir değil !

- Koordinatların komüt etmemesi fikri ilk olarak Heisenberg tarafından ortaya atıldı. Amaç kuantum alan teorisindeki çeşitli modelleri renormalize ederken ortaya çıkan ıraksaklıklardan kurtulmak.
- İlk makale 1947 Snyder.
- 1980'lerde matematikçiler (özellikle Alain Connes) yer değiştirmeyen geometriyi kurdular.
- 1995 Doplicher, Fredenhagen, Roberts: Genel görelilik kuramına göre eğer bir bölgede enerji yoğunluğu yeteri kadar yüksekse bir kara delik oluşturulabilir. Diğer taraftan Heisenberg belirsizlik ilkesine göre uzay-zamanda iki nokta arasındaki mesafenin ölçümü, bu mesafenin tersiyle orantılı olarak momentumda belirsizliğe yol açar.
- 1999 Seiberg ve Witten sicim teorisinin bir alt limitinin komütatif olmayan uzaylarla ilgili olduğunu gösterdiler. Bu çalışmadan sonra konu oldukça popüler hale geldi !

Yeni (tuhaf) özellikler

- Henüz deneysel bir bulgu yok. Hala bir parçacığın pozisyonunu ne kadar kesinlikle ölçebileceğimizi bilmiyoruz.
- UV/IR karışımı : Düşük momentumlu ıraksaklıklar yüksek momentumlu ıraksaklıklarla karışıyor.
- $\theta^{0i} = 0$ seçilerek teorilerde üniterlik korunsa bile, diğer komüt etmeme bağıntıları nedeniyle Lorentz değişmezliği bozuluyor.

Ne işe yarar/yarayabilir ?

- Katı hal fiziğinde uygulamaları var (Kuantum Hall Etkisi, Kesirli Kuantum Hall Etkisi, Grafen vs.)
- Standard Modelin genelleştirilmesi.
- Işıktan hızlı nötrinoların (!?) anlaşılması
- Belki de en ilginçi *"Kuantumlanmış"* uzay-zaman fikri ile kuantum yer çekimi teorisinin inşası

bir kaç olası uygulama alanı olarak yazılabilir.

Yer değiştirmeyen alan teorileri

Fiziksel olarak kabul edilebilir en basit yer değiştirmeme özelliğine sahip bir uzay, Minkowski uzayını anti-simetrik, sabit bir θ parametresi ile deforme ederek bulunur :

$$[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] = \theta_{\mu\nu}$$

Bu yer değiştirmeme bağıntısını elde etmek için Groenewold–Moyal Çarpımı ($*$–çarpımı) kullanılır:

$$f(x) * g(x) \equiv exp\left(\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial y^\nu}\right) f(x)g(y)|_{y\to x}$$
$$= f(x)\cdot g(x) + \frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\partial_\mu f(x)\partial_\nu g(x) + \cdots$$

Böylelikle yer değiştirmeyen koordinatlar artık sıradan koordinatların $*$–komütatörü olarak yazılabilir :

$$[x^\mu\,, x^\nu]_* \equiv x^\mu \, * \, x^\nu - x^\nu \, * \, x^\mu = i\theta^{\mu\nu}.$$

- Kolayca görülebileceği gibi artık iki fonksiyonun $*$–çarpımı yer değiştirmez :

$$f(x) * g(x) \neq g(x) * f(x)$$

- Ancak eğer bu fonksiyonlar sonsuzda yeteri kadar hızlı sıfıra giderlerse integral altında

$$\int f * g = \int f.g = \int g * f$$

yer değiştirme özelliğine sahiptir.

- $*$–çarpımı asosiyatiftir :

$$f(x) * g(x) * h(x) = \big(f * g\big) * h = f * \big(g * h\big)$$

- Benzer şekilde integral altında bir $*$–çarpımından kurtulunabilir :

$$\int f * g * h = \int \big(f * g\big).h(x) = \int f.\big(g * h\big)$$

- Bilinen alan teorilerindeki çarpımlar yukarıda tanımlanan $*$-çarpımı ile değiştirilerek yer değiştirmeyen alan teorisi modelleri elde edilebilir.
- Örneğin yer değiştirmeyen $\hat{\phi}^4$ teorisi,

$$\hat{S} = \int d^4x\left(\frac{1}{2}\partial_\mu\hat{\phi} * \partial_\mu\hat{\phi} + \frac{1}{2}m^2\hat{\phi} * \hat{\phi} + \frac{g}{4!}\hat{\phi} * \hat{\phi} * \hat{\phi} * \hat{\phi}\right)$$

- Ya da yer değiştirmeyen Yang-Mills teorisi

$$\hat{S} = -\frac{1}{4}Tr\int d^4x\hat{F}^{\mu\nu} * \hat{F}_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}Tr\int d^4x\hat{F}^{\mu\nu}\hat{F}_{\mu\nu}$$

$$\hat{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu\hat{A}_\nu - \partial_\nu\hat{A}_\mu - i[\hat{A}_\mu, \hat{A}_\nu]_*$$

şeklinde yazılabilir.

Esasında yer değiştirmeyen koordinatlarla ilgili tamamen fiziksel ve gözlemlenebilen bir örnek katı hal fiziğinden verilebilir.

- Bir düzlemde (x^1, x^2) hareket eden elektronlara dik yönde (x^3) sabit bir manyetik alan ugulandığını düşünelim.
- Bu elektronlar için Lagrangian

$$L = \frac{m}{2}\dot{\vec{x}}^2 - e\dot{\vec{x}} \cdot \vec{A}$$

şeklinde yazılır.

- $A_i = -\frac{1}{2}B_{ij}x^j$, $B_{ij} \equiv \epsilon_{ij}B$ olduğundan $(\epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = 1)$

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^i\dot{x}^i - \frac{e}{2}B_{ij}x^i\dot{x}^j$$

yukarıdaki Lagrangian şeklinde de yazılabilir.

- Eğer $|m\dot{x}^i| << |B_{ij}x^j|$ ise kinetik terim ihmal edilebilir:

$$L \approx -\frac{e}{2} B_{ij} x^i \dot{x}^j$$

- Bu eylemden kanonik momentum

$$\pi_j = \frac{dL}{d\dot{x}^j} = -eB_{jk}x^k$$

olarak elde edilir.

- Kanonik kuantizasyon yapıldığında

$$[\pi_j, x^l] = -eB_{jk}[x^k, x^l] = -i\hbar\delta_j^l$$

olacağından

$$[x^k, x^l] = i(\hbar/eB)^{kl} \equiv i\theta^{kl}$$

bulunur !

Görüldüğü gibi manyetik alan uzayın kendisine yer değiştirmeyen bir yapı atıyor ! (Landau, 1930)

Benzer bir ilişki, Euclidean uzayda bozonik sicim sabit bir Neveu–Schwarz iki-form B-alanı (manyetik alan gibi) altında hareket ediyorsa elde edilebilir. (Seiberg-Witten JHEP'99)

- Ancak bu ilişkinin çok ilginç bir sonucu var : *yer değiştirmeyen ayar teorileri bildiğimiz ayar teorilerinin bir deformasyonu olarak yazılabilir !*.

$$\hat{A}^{\mu} \longrightarrow \hat{A}_{\mu}(A_{\mu}, \theta)$$

$$S_{NC-YM}[\hat{A}] \longrightarrow S_{YM}[A] + S_{\theta}[A, \theta]$$

  Bu gönderim Seiberg–Witten (SW) gönderimi olarak adlandırılmakta.
- Yer değiştirmeyen teoriler SW–gönderimi ile elde edilen "etkin" teoriler olarak düşünülmekte !
- SW gönderiminin yer değiştirmeme parametresi θ cinsinden çözümü bilinmeli.

Özet

- Yer değiştirmeyen Yang–Mills $(\hat{A}\,,\,\hat{\Lambda})$
- Seiberg – Witten Gönderimi $(\hat{A} \rightarrow \hat{A}(A,\theta)\,,\,\hat{\Lambda} \rightarrow \hat{\Lambda}(A,\alpha,\theta))$
- Seiberg Witten Gönderiminin Çözümü.
  - Homojen olmayan denklemin tüm mertebe çözümü
  - Homojen denklemin tüm mertebeden çözümleri
  - İkinci mertebeye kadar homojen çözümlerin katkıları.
- Sonuç

Yer değiştirmeyen Yang–Mills (NCYM) Teorisi

NCYM teorisinin eylemi $*$–çarpımı yardımıyla

$$\hat{S} = -\frac{1}{4} Tr \int d^4x \hat{F}^{\mu\nu} * \hat{F}_{\mu\nu} = -\frac{1}{4} Tr \int d^4x \hat{F}^{\mu\nu} \hat{F}_{\mu\nu}$$

şeklinde yazılır. Burada,

$$\hat{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial_\nu \hat{A}_\mu - i[\hat{A}_\mu, \hat{A}_\nu]_*$$

yer değiştirmeyen ayar alanı $\hat{A}$'nın şiddetidir. Eylem yer değiştirmeyen ayar dönüşümleri altında değişmezdir :

$$\hat{\delta}_{\hat{\Lambda}} \hat{A}_\mu = \partial_\mu \hat{\Lambda} - i[\hat{A}_\mu, \hat{\Lambda}]_* \equiv \hat{D}_\mu \hat{\Lambda}$$

$$\hat{\delta}_{\hat{\Lambda}} \hat{F}_{\mu\nu} = i[\hat{\Lambda}, \hat{F}_{\mu\nu}]_* .$$

Burada, $\hat{\Lambda}$ yer değiştirmeyen ayar parametresidir.

Seiberg–Witten gönderimi

Farklı regülarizasyon teknikleri kullanarak sicim teorisinin bir alt limiti olarak hem normal hem de yer değiştirmeyen ayar teorileri elde etmek mümkün *(SW'99).*

Dolayısıyla A_μ ve α, yer değiştirmeyen $\hat{A}_\mu$ ayar alanının ve yer değiştirmeyen $\hat{\Lambda}$ parametresinin, komüt eden karşılıkları olsun.

$\Longrightarrow$ A ve $\hat{A}$ arasında *ayar değişmezliğini koruyacak* şekilde tanımlanan bir gönderim olmalı !

- İlk bakışta basitce alanları yeniden tanımlamak, örneğin $\hat{A} = \hat{A}(A, \partial A, \cdots ; \theta)$ ve $\hat{\Lambda} = \hat{\Lambda}(\Lambda, \partial\Lambda, \cdots ; \theta)$ problemi çözecekmiş gibi görünüyor.

Seiberg–Witten gönderimi

Farklı regülarizasyon teknikleri kullanarak sicim teorisinin bir alt limiti olarak hem normal hem de yer değiştirmeyen ayar teorileri elde etmek mümkün *(SW'99)*.

Dolayısıyla A_μ ve α, yer değiştirmeyen $\hat{A}_\mu$ ayar alanının ve yer değiştirmeyen $\hat{\Lambda}$ parametresinin, komüt eden karşılıkları olsun.

$\Longrightarrow$ A ve $\hat{A}$ arasında *ayar değişmezliğini koruyacak* şekilde tanımlanan bir gönderim olmalı !

- İlk bakışta basitce alanları yeniden tanımlamak, örneğin $\hat{A} = \hat{A}(A, \partial A, \cdots ; \theta)$ ve $\hat{\Lambda} = \hat{\Lambda}(\Lambda, \partial\Lambda, \cdots ; \theta)$ problemi çözecekmiş gibi görünüyor.
- Ama doğru değil !

$$\hat{\Lambda} \neq \hat{\Lambda}(\Lambda, \partial\Lambda, \cdots ; \theta)$$

Ayar grubunun $U(1)$ olduğu duruma bakalım.

- komüt eden durumda ayar dönüşümleri

$$\delta_\alpha A_\mu = \partial_\mu \alpha$$

şeklinde verilir.

- yer değiştirmeyen durumda ise

$$\hat{\delta}_{\hat{\Lambda}} \hat{A}_\mu = \partial_\mu \hat{\Lambda} - i[\hat{A}_\mu, \hat{\Lambda}]_*$$

dir.

- Görüldüğü gibi bir durumda dönüşümler Abelyenken diğer durumda Abelyen değildir. Abelyen bir grup Abelyen olmayan bir gruba isomorfik olamaz.

İki ayar alanı A ve A''nün nasıl birbirleriyle ayar-özdeş (gauge equivalent) olabileceğini anlamamız gerekli

- $U = e^{(i\alpha)}$ olacak şekilde eğer $A = UA'U^{-1}$ ise bu alana karşılık gelen yer değiştirmeyen alan için $\hat{A} = \hat{U}\hat{A}'\hat{U}^{-1}$, $U = e^{(i\hat{\Lambda})}$ elde etmeliyiz.
- Dolayısıyla iki ayar grubu arasında bir gönderim yerine,

$$\hat{A}(A) + \hat{\delta}_{\hat{\Lambda}}\hat{A}(A) = \hat{A}(A + \delta_\alpha A)$$

şeklinde iki ayar özdeşliği arasında bir ilişki yazılabilir. Burada δ_α aşina olduğumuz ayar dönüşümüdür :

$$\delta_\alpha A_\mu = \partial_\mu \alpha - i[A_\mu, \alpha] \equiv D_\mu \alpha.$$

- Böylelikle, $\hat{\Lambda}$'nın aynı zamanda ayar alanına bağlı bağlı olduğu görülür.

$$\hat{\Lambda} = \hat{\Lambda}(\alpha, A, \theta)$$

Yani SW–gönderimi basit bir yeniden alan tarifi (field redefinition) değil.

Bu gönderim

$$\hat{\delta}_{\hat{\Lambda}}\hat{A}_\mu(A;\theta) = \hat{A}_\mu(A+\delta_\alpha A;\theta) - \hat{A}_\mu(A;\theta) = \delta_\alpha \hat{A}_\mu(A;\theta)$$

şeklinde de yazılabilir. yer değiştirmeyen alan ve parametrenin fonksiyonel bağımlılığı

$$\hat{A}_\mu = \hat{A}_\mu(A;\theta) \quad , \quad \hat{\Lambda} = \hat{\Lambda}_\alpha(\alpha, A;\theta).$$

olduğundan

$$\hat{\delta}_{\hat{\Lambda}}\hat{A}_\mu(A;\theta) = \delta_\alpha \hat{A}_\mu(A;\theta)$$

gönderimi $\hat{A}_\mu$ ve $\hat{\Lambda}_\alpha$ için eş zamanlı çözülmelidir.

$\Longrightarrow$ Bu yöntem ile çözmek çok zor !

Diğer taraftan ayar tutarlılık (gauge consistency) şartını yazalım

$$\delta_\alpha \delta_\beta - \delta_\beta \delta_\alpha = \delta_{-i[\alpha,\beta]}.$$

Λ Lie cebri değerli bir ayar parametresi olsun : $\Lambda = \Lambda_a T^a$.

- Yer değiştirmeyen durum için

  $$(\delta_{\Lambda_\alpha}\delta_{\Lambda_\beta} - \delta_{\Lambda_\beta}\delta_{\Lambda_\alpha})\hat{\Psi} = \frac{1}{2}[T^a, T^b]\{\Lambda_{\alpha,a}, \Lambda_{\beta,b}\}_* * \hat{\Psi} + \frac{1}{2}\{T^a, T^b\}[\Lambda_{\alpha,a}, \Lambda_{\beta,b}]$$

  elde edilir.
- Sadece $U(N)$ ayar grubu için $\{T^a, T^b\}$ anti-komütatörü tekrar T^a'lar ile yazılabilir.

Dolayısıyla SW yaklaşımında $U(N)$ harici başka bir ayar grubu kullanılamaz.

Ancak yer değiştirmeyen ayar teorileri her hangi bir ayar grubu için genelleştirmek mümkündür *(J. Wess et.al. EPJ'01)*. Bunun için

- Ayar parametreleri Lie cebrinin zarf (enveloping) cebrinde alınmalıdır :

$$\hat{\Lambda} = \alpha_a T^a + \Lambda^1_{ab} : T^a T^b : + \cdots \Lambda^{n-1}_{a_1 \cdots a_n} : T^{a_1} \cdots T^{a_n} : + \cdots$$

- Bütün alanlar ve parametreler Lie cebrinde değer alan alanlara $A, \psi, \cdots$ ve parametreye α bağlı olmalıdır:

$$\hat{A}_\mu \equiv \hat{A}_\mu(A) \quad , \quad \hat{\Psi} \equiv \hat{\Psi}(A, \psi) \quad , \quad \hat{\Lambda} = \hat{\Lambda}(A, \alpha)$$

- yer değiştirmeyen ayar tutarlılık şartı sağlanmalıdır :

$$i\delta_\alpha \hat{\Lambda}_\beta - i\delta_\beta \hat{\Lambda}_\alpha - [\hat{\Lambda}_\alpha, \hat{\Lambda}_\beta]_* = i\hat{\Lambda}_{-i[\alpha,\beta]}.$$

Burada önemli olan nokta Wess ve arkadaşlarının inşa yöntemi tamamen sicim teorisinden bağımsız olmasıdır !

Böylelikle SW yaklaşımından farklı olarak SW gönderiminin çözümü için fazladan bir denklem elde edilir.

$$i\delta_\alpha \hat{\Lambda}_\beta - i\delta_\beta \hat{\Lambda}_\alpha - [\hat{\Lambda}_\alpha, \hat{\Lambda}_\beta]_* = i\hat{\Lambda}_{-i[\alpha,\beta]}.$$

Dikkat edilirse bu denklem sadece $\hat{\Lambda}$ içermektedir.

Bu denklem çözüldüğünde

$$\hat{\delta}_{\hat{\Lambda}} \hat{A}_\mu(A;\theta) = \delta_\alpha \hat{A}_\mu(A;\theta)$$

denkleminde yerine koyulursa bu sefer sadece A_μ içeren bir denklem elde edilir.

SW gönderiminin birinci ve ikinci mertebeden çözümleri aşağıdaki strateji ile elde edilebilir.

- Denklemlerin boyut analizi ve indeks yapısı incelenir.
- Alanlar ve alanların türevleri cinsinden bu şartları sağlayan en genel ifade yazılır.
- Bu ifadeler denklemlerde yerlerine konularak ifadelerdeki terimlerin katsayıları belirlenir.

Ancak,

- Bu strateji yüksek mertebeli çözümleri bulmak için faydalı değil !!!
- Literatürde verilen çözümler sadece ikinci mertebeye kadar(dı) ve ayrıca tüm ikinci mertebe çözümler birbirlerinden farklı.
- 2.mertebedeki çözümler çok uzun ifadeler ve hesaplamalarda kullanılması çok da mümkün değil.

Yüksek mertebeden çözümleri bilmek

- Teorilerin tutarlılığını test etmek için önemli
- NC gravite için 1.mertebe çözümler katkı vermiyor, ilk katkı 2. mertebeden geliyor.

Ayar tutarlılık ve ayar eşdeğerliliği denklemleri düşük ve yüksek mertebeli çözümler arasında tekrarlanan (recursive) bir yapıya sahip.

$\Longrightarrow$ Dolayısıyla tüm mertebe çözümler de tekrarlanan bir yapıya sahip olup olmayacağı sorulabilir.

Gerçekten de tüm mertebe çözümleri bu şekilde bulmak mümkün (B. Yapışkan, K.Ü PRD'08) !

Yerdeğiştirmeyen BRST dönüşümleri

BRST formalizması SW–gönderiminin çözümlerinin anlaşılmasında da faydalı.

- ayar parametresi $\alpha \to c$ FP hayalet alanı.
- ayar dönüşümü $\delta \to s$ BRST dönüşümü :

$$sA_\mu = D_\mu c \quad , \quad sc = ic \cdot c \quad , \quad s^2 = 0$$

Benzer şekilde yerdeğiştirmeyen BRST için

- $\hat{\Lambda} \to \hat{C}$ FP hayalet alanı.
- NC ayar dönüşümü $\hat{\delta} \to \hat{s}$ NC BRST dönüşümü :

$$\hat{s}\hat{A}_\mu = \hat{D}_\mu \hat{C} \quad , \quad \hat{s}\hat{C} = i\hat{C} * \hat{C} \quad , \quad \hat{s}^2 = 0$$

Ayar özdeşliği BRST dönüşümleri cinsinden

$$\hat{s}\hat{A}_\mu(A;\theta) = s\hat{A}_\mu(A;\theta).$$

şeklinde yazılabilir.

SW– gönderimini her θ mertebesinde elde etmek için $\hat{A}$ ve $\hat{\Lambda}$ θ parametresi cinsinden kuvvet serisine açılabilir:

$$\hat{A}_\mu = A_\mu + A_\mu^{(1)} + \cdots + A_\mu^{(n)} + \cdots$$

$$\hat{C} = c + C^{(1)} + \cdots + C^{(n)} + \cdots$$

Böylelikle n.nci mertebeye etki eden BRST dönüşümleri

$$\begin{aligned} sC^{(n)} &= i \sum_{p+q+r=n} C^{(p)} *^r C^{(q)} \\ sA_\mu^{(n)} &= \partial_\mu C_\alpha^{(n)} - i \sum_{p+q+r=n} [A_\mu^{(p)}, C_\alpha^{(q)}]_{*^r} \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$f(x) *^r g(x) \equiv \frac{1}{r!}\left(\frac{i}{2}\right)^r \theta^{\mu_1\nu_1} \cdots \theta^{\mu_r\nu_r} \partial_{\mu_1} \cdots \partial_{\mu_r} f(x) \partial_{\nu_1} \cdots \partial_{\nu_r} g(x)$$

ifadesini temsil etmektedir.

SW– gönderiminin çözümleri

İlgili alanın n.nci mertebedeki terimi sağ tarafa atarak BRST dönüşümlerinden yeni bir operatör Δ elde edilebilir

$$\Delta C^{(n)} \equiv sC^{(n)} - i\{c, C^{(n)}\} = i \sum_{\substack{p+q+r=n,\\ p,q\neq n}} C^{(p)} *^r C^{(q)}$$

$$\Delta A_\mu^{(n)} \equiv sA_\mu^{(n)} - i[c, A_\mu^{(n)}] = \partial_\mu C_\alpha^{(n)} - i \sum_{\substack{p+q+r=n,\\ p\neq n}} [A_\mu^{(p)}, C_\alpha^{(q)}]_{*^r}$$

Δ'nin de nilpotent olduğu gösterilebilir

$$\Delta^2 = 0$$

Dolayısıyla Δ için de bir kohomoloji problemi tanımlabilir.

Görüldüğü gibi Δ yardımıyla her bir θ mertebesi için bir inhomojen denklem sistemi elde edilebilir

$$\Delta C^{(n)} = \mathcal{G}^{(n)}(\theta^n; c, A) \Rightarrow \Delta \mathcal{G}^{(n)} = 0$$

$$\Delta A_\mu^{(n)} = \mathcal{H}^{(n)}(\theta^n; A) \Rightarrow \Delta \mathcal{H}^{(n)} = 0$$

Bu denklemlerin çözümü her bir θ mertebesindeki SW–gönderimini verir.

Ancak yukarıdaki tanımdan da görülebileceği gibi bu çözümler kesin değildir. Her bir θ mertebesine homojen denklemlerin çözümleri de eklenebilir :

$$\Delta \tilde{C}^{(n)} = 0 \quad , \quad \Delta \tilde{A}_\mu^{(n)} = 0$$

Bu ise SW–gönderimindeki keyfilikle ilgilidir.

SW (JHEP'99) makalesinde birinci mertebe çözümler

$$C^{(1)} = -\frac{1}{4}\theta^{\kappa\lambda}\{A_\kappa, \partial_\lambda \alpha\}$$

$$A_\gamma^{(1)} = -\frac{1}{4}\theta^{\kappa\lambda}\{A_\kappa, \partial_\lambda A_\gamma + F_{\lambda\gamma}\}.$$

şeklinde verilmiştir. Tanım yardımıyla alan şiddeti

$$F_{\gamma\rho}^{(1)} = -\frac{1}{4}\theta^{\kappa\lambda}\Big(\{A_\kappa, \partial_\lambda F_{\gamma\rho} + D_\lambda F_{\gamma\rho}\} - 2\{F_{\gamma\kappa}, F_{\rho\lambda}\}\Big).$$

olarak elde edilir.

Seiberg-Witten diferansiyel denklemi

Deformasyon parametresini sonsuz küçük değiştirelim.

$$\theta \to \theta + \delta\theta$$

Fiziğin değişmemesi için, θ değiştiğinde aynı zamanda $\hat{A}(\theta)$ ve $\hat{\Lambda}(\theta)$ de değişmelidir. Böylelikle 1. mertebe çözümlerden aşağıdaki diferansiyel denklemler elde edilir :

$$\begin{aligned}
\delta\hat{A}_\gamma(\theta) &= \hat{A}_\gamma(\theta+\delta\theta) - \hat{A}_\gamma(\theta) \\
&= \delta\theta^{\mu\nu}\frac{\partial\hat{A}_\gamma}{\partial\theta^{\mu\nu}} = -\frac{1}{4}\delta\theta^{\kappa\lambda}\{\hat{A}_\kappa, \partial_\lambda\hat{A}_\gamma + \hat{F}_{\lambda\gamma}\}_*
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta\hat{C}(\theta) &= \hat{C}(\theta+\delta\theta) - \hat{C}(\theta) \\
&= \delta\theta^{\mu\nu}\frac{\partial\hat{C}}{\partial\theta^{\mu\nu}} = -\frac{1}{4}\theta^{\kappa\lambda}\{\hat{A}_\kappa, \partial_\lambda\hat{C}\}_*
\end{aligned}$$

Bu denklemler genellikle SW diferansiyel denklemleri olarak adlandırılır.

Diferansiyel denklemlerin çözümünü bulmak için

- yer değiştirmeyen ayar parametresini ve ayar alanını Taylor serisine açalım,

$$\begin{aligned}\hat{C}^{(n)} &= c + C^{(1)} + \cdots + C^{(n)},\\ \hat{A}_\mu^{(n)} &= A_\mu + A_\mu^{(1)} + \cdots + A_\mu^{(n)}.\end{aligned}$$

- Böylelikle bu denklemlerden

$$\hat{C}_\alpha^{(n+1)} = \alpha - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k!}\theta^{\mu_1\nu_1}\theta^{\mu_2\nu_2}\cdots\theta^{\mu_k\nu_k}\left(\frac{\partial^{k-1}}{\partial\theta^{\mu_2\nu_2}\cdots\partial\theta^{\mu_k\nu_k}}\{\hat{A}_{\mu_1}^{(k)}, \partial_{\nu_1}\hat{C}_\alpha^{(k)}\}_*\right)_{\theta=0}$$

$$\hat{A}_\gamma^{(n+1)} = A_\gamma - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k!}\theta^{\mu_1\nu_1}\theta^{\mu_2\nu_2}\cdots\theta^{\mu_k\nu_k}\left(\frac{\partial^{k-1}}{\partial\theta^{\mu_2\nu_2}\cdots\partial\theta^{\mu_k\nu_k}}\{\hat{A}_{\mu_1}^{(k)}, \partial_{\nu_1}\hat{A}_\gamma^{(k)} + \hat{F}_{\nu_1\gamma}^{(k)}\}_*\right)_{\theta=0}$$

elde edilir.

Bu toplamdan $n+1$.nci terim $\hat{C}_\alpha^{(n+1)}$

$$C_\alpha^{n+1} = -\frac{1}{4(n+1)!}\theta^{\mu\nu}\theta^{\mu_1\nu_1}\dots\theta^{\mu_n\nu_n}\left(\frac{\partial^n}{\partial\theta^{\mu_1\nu_1}\dots\partial\theta^{\mu_n\nu_n}}\{\hat{A}_{\mu_1}^{(n)},\partial_{\nu_1}\hat{C}_\alpha^{(n)}\}_*\right)_{\theta=0}$$

olarak elde edilir. Türevler alındıktan sonra θ 0 a götürüldüğünden parantez içindeki ifade n.nci mertebeye kadar bir toplam olarak yazılabilir :

$$C_\alpha^{n+1} = -\frac{1}{4(n+1)!}\theta^{\mu\nu}\theta^{\mu_1\nu_1}\dots\theta^{\mu_n\nu_n}\left(\frac{\partial^n}{\partial\theta^{\mu_1\nu_1}\dots\partial\theta^{\mu_n\nu_n}}\sum_{p+q+r=n}\{A_\mu^{(p)},\partial_\nu C_\alpha^{(q)}\}_{*^r}\right).$$

Bu eşitlikten ise

$$C_\alpha^{(n+1)} = -\frac{1}{4(n+1)}\theta^{\mu\nu}\sum_{p+q+r=n}\{A_\mu^{(p)},\partial_\nu C_\alpha^{(q)}\}_{*^r}.$$

çözümü elde edilir !

Benzer cebirsel işlemler kullanılarak

$$A_\gamma^{(n+1)} = -\frac{1}{4(n+1)!}\theta^{\mu\nu}\theta^{\mu_1\nu_1}\dots\theta^{\mu_n\nu_n}\times \times\left(\frac{\partial^n}{\partial\theta^{\mu_1\nu_1}\dots\partial\theta^{\mu_n\nu_n}}\{\hat{A}_{\mu_1}^{(n)},\partial_{\nu_1}\hat{A}_\gamma^{(n)}+\hat{F}_{\nu_1\gamma}^{(n)}\}_*\right)_{\theta=0}$$

ifadesinden yer değiştirmeyen ayar alanı için

$$A_\gamma^{(n+1)} = -\frac{1}{4(n+1)}\theta^{\mu\nu}\sum_{p+q+r=n}\{A_\mu^{(p)},\partial_\nu A_\gamma^{(q)}+F_{\nu\gamma}^{(q)}\}_{*^r}.$$

çözümü elde edilir.

Diğer alanlar için Seiberg–Witten gönderimi

Ayar değişmez bir teoride yer değiştirmeyen bir $\hat{\Psi}$ alanı için SW gönderimi

$$\hat{s}\hat{\Psi}(\psi, A; \theta) = s\hat{\Psi}(\psi, A; \theta).$$

ilişkisi yardımıyla elde edilebilir *(J. Wess et.al. EPJ'01)*.

Benzer şekilde bu ayar eşdeğerliliği ilişkisinden çözümleri bulmak için $\hat{\Psi}$ kuvvet serisine açılmalıdır.

$$\hat{\Psi} = \psi + \Psi^{(1)} + \cdots + \Psi^{(n)} + \cdots$$

- Bu ayar eşdeğerlilik ilişkisi hem bozonik hem de fermiyonik alanlar için geçerlidir.
- Aynı zamanda bu ilişki ψ alanın değer aldığı her hangi bir ayar grubunun hem fundamental hem de adjoint gösterimi için geçerlidir.

Fundamental gösterim :
Madde, ψ için, BRST dönüşümü

$$s\psi = ic \cdot \psi$$

ile verilir. Yer değiştirmeyen BRST dönüşümleri $*$–çarpımı içerir :

$$\hat{s}\hat{\Psi} = i\hat{C} * \hat{\Psi}.$$

Daha önce anlatılan yöntem kullanılarak tüm mertebeler için ayar eşdeğerlilik ilişkisi

$$\Delta\Psi^{(n)} \equiv s\Psi^{(n)} - ic \cdot \Psi^{(n)} = i \sum_{\substack{p+q+r=n, \\ q \neq n}} C^{(p)} *^{r} \Psi^{(q)},$$

şeklinde yazılabilir.
Buradan elde edilecek $\Psi^{(n)}$ çözümlerine homojen çözüm $\tilde{\Psi}^{(p)}$ eklenebilir.

$$\Delta_\alpha \tilde{\Psi}^{(n)} = 0.$$

Birinci mertebe için bir çözüm Wess ve arkadaşları tarafından bulunmuştur:

$$\Psi^{(1)} = -\frac{1}{4}\theta^{\kappa\lambda}A_\kappa(\partial_\lambda + D_\lambda)\psi$$

Burada

$$D_\mu\psi = \partial_\mu\psi - iA_\mu\psi$$

kovaryant türevdir.

Birinci mertebe çözümlerden SW diferansiyel denklemini türeterek,

$$\delta\theta^{\mu\nu}\frac{\partial\hat{\Psi}}{\partial\theta^{\mu\nu}} = -\frac{1}{4}\delta\theta^{\kappa\lambda}\hat{A}_\kappa * (\partial_\lambda\hat{\Psi} + \hat{D}_\lambda\hat{\Psi})$$

bu denklemin çözümlerine bakacağız. Bu denklem $\theta^{\mu\nu}$ anti-simetrik olduğundan,

$$\frac{\partial\hat{\Psi}}{\partial\theta^{\kappa\lambda}} = -\frac{1}{8}\hat{A}_\kappa * (\partial_\lambda\hat{\Psi} + \hat{D}_\lambda\hat{\Psi}) + \frac{1}{8}\hat{A}_\lambda * (\partial_\kappa\hat{\Psi} + \hat{D}_\kappa\hat{\Psi})$$

şeklinde de yazılabilir. Burada yer değiştirmeyen kovaryant türev

$$\hat{D}_\mu\hat{\Psi} = \partial_\mu\hat{\Psi} - i\hat{A}_\mu * \hat{\Psi} \, .$$

ile tanımlanmıştır.

Çözümü bulmak için önce kullandığımız yönteme benzer olar, $\hat{\Psi}$'yi Taylor serisine açalım,

$$\begin{aligned}\hat{\Psi}^{(n+1)} &= \psi + \Psi^1 + \Psi^2 + \cdots + \Psi^{n+1} \\ &= \psi + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} \theta^{\mu_1\nu_1}\theta^{\mu_2\nu_2}\ldots\theta^{\mu_k\nu_k} \left(\frac{\partial^k}{\partial\theta^{\mu_1\nu_1}\ldots\partial\theta^{\mu_k\nu_k}} \left(\hat{\Psi}^{(n+1)}\right)\right)_{\theta=0}\end{aligned}$$

Diferansiyel denklemden

$$\begin{aligned}\hat{\Psi}^{(n+1)} &= \psi - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k!}\theta^{\mu_1\nu_1}\theta^{\mu_2\nu_2}\ldots\theta^{\mu_k\nu_k} \times \\ &\quad \times \Big(\frac{\partial^{k-1}}{\partial\theta^{\mu_2\nu_2}\ldots\partial\theta^{\mu_k\nu_k}}\hat{A}^{(k)}_{\mu_1} * (\partial_{\nu_1}\hat{\Psi}^{(k)} + (\hat{D}_{\nu_1}\hat{\Psi})^{(k)})\Big)_{\theta=0}\end{aligned}$$

elde edilir. Burada,

$$(\hat{D}_\mu\hat{\Psi})^{(n)} = \partial_\mu\hat{\Psi}^{(n)} - i\hat{A}^{(n)}_\mu * \hat{\Psi}^{(n)}.$$

ile verilmiştir.

Tüm mertebe çözümleri bulmak için $n+1$.nci bileşeni yazalım,

$$\begin{aligned}\Psi^{n+1} &= -\frac{1}{4(n+1)!}\theta^{\mu\nu}\theta^{\mu_1\nu_1}\ldots\theta^{\mu_n\nu_n}\times \\ &\times\left(\frac{\partial^n}{\partial\theta^{\mu_1\nu_1}\ldots\partial\theta^{\mu_n\nu_n}}\hat{A}^{(n)}_\mu * (\partial_\nu\hat{\Psi}^{(n)} + (\hat{D}_\nu\hat{\Psi})^{(n)})\right)_{\theta=0} \\ = & -\frac{1}{4(n+1)!}\theta^{\mu\nu}\theta^{\mu_1\nu_1}\ldots\theta^{\mu_n\nu_n}\times \\ &\times\left(\frac{\partial^n}{\partial\theta^{\mu_1\nu_1}\ldots\partial\theta^{\mu_n\nu_n}}\sum_{p+q+r=n}A^p_\mu *^r (\partial_\nu\Psi^{(q)} + (D_\nu\Psi)^q)\right)\end{aligned}$$

Burada

$$(D_\mu\Psi)^n = \partial\Psi^n - i\sum_{p+q+r=n}A^p_\mu *^r \Psi^q.$$

θ'ya göre türevleri aldıktan sonra tüm mertebe çözümleri

$$\Psi^{(n+1)} = -\frac{1}{4(n+1)}\theta^{\kappa\lambda}\sum_{p+q+r=n}A^{(p)}_\kappa *^r (\partial_\lambda\Psi^{(q)} + (D_\lambda\Psi)^{(q)}).$$

şeklinde elde edilir.

$n = 0$ için Wess tarafından elde edilmiş çözüm bulunur .
$n = 1$ için ikinci mertebe çözüm

$$\begin{aligned}\psi^2 &= -\frac{1}{8}\theta^{\kappa\lambda}\big(2A^1_\kappa\partial_\lambda\psi - iA^1_\kappa A_\lambda\psi + 2A_\kappa\partial_\lambda\psi^1 - iA_\kappa A^1_\lambda\psi - iA_\kappa A_\lambda\psi^1 \\ &\quad + i\theta^{\mu\nu}\partial_\mu A_\kappa\partial_\nu\partial_\lambda\psi + \frac{1}{2}\theta^{\mu\nu}\partial_\mu A_\kappa\partial_\nu A_\lambda\psi \\ &\quad + \frac{1}{2}\theta^{\mu\nu}\partial_\mu A_\kappa A_\lambda\partial_\nu\psi + \frac{1}{2}\theta^{\mu\nu}A_\kappa\partial_\mu A_\lambda\partial_\nu\psi\big).\end{aligned}$$

şeklindedir. Bu çözümü literatürdeki diğer çözümler ile karşılaştırmak için A^1 ve Λ^1 yerlerine koyulursa

$$\begin{aligned}&\psi^2 = (1/32)\theta^{\mu\nu}\theta^{\kappa\lambda}\big(-4i\partial_\mu A_\kappa\partial_\lambda\partial_\nu\psi + 4A_\mu A_\kappa\partial_\lambda\partial_\nu\psi - 4\partial_\mu A_\kappa A_\nu\partial_\lambda\psi - 4A_\mu\partial_\kappa A_\nu\partial_\lambda\psi \\ &+8A_\mu\partial_\nu A_\kappa\partial_\lambda\psi - 2\partial_\mu A_\kappa\partial_\nu A_\lambda\psi + 4A_\mu A_\kappa A_\nu\psi - 3A_\mu A_\nu A_\kappa A_\lambda\psi - 2A_\mu A_\kappa A_\lambda A_\nu\psi + 4iA_\mu A_\kappa A_\nu\partial_\lambda\psi \\ &-4iA_\mu A_\kappa A_\lambda\partial_\nu\psi - 4iA_\mu A_\nu A_\kappa\partial_\lambda\psi + 2i\partial_\mu A_\kappa A_\nu A_\lambda\psi - 2iA_\mu A_\kappa\partial_\lambda A_\nu\psi - i\partial_\mu A_\kappa A_\lambda A_\nu\psi - 5iA_\mu\partial_\nu A_\kappa A_\lambda\psi \\ &+3iA_\mu\partial_\kappa A_\nu A_\lambda\psi - iA_\mu A_\kappa\partial_\nu A_\lambda\psi\big).\end{aligned}$$

elde edilir. Bu çözüm ise Moller tarfından verilen çözümün aynısıdır.

Adjoint gösterim :

Adjoint gösterimde BRST dönüşümü

$$s\psi = i[c, \psi]$$

ile verilir. yer değiştirmeyen durumda ise

$$\hat{s}\hat{\Psi} = i[\hat{C}_\alpha, \hat{\Psi}]_*$$

şeklinde tanımlanır. Genel strateji kullanılarak ayar eşdeğerliliği ilişkisi

$$\Delta\Psi^{(n)} \equiv \delta_\alpha \Psi^{(n)} - i[c, \Psi^{(n)}] = i \sum_{\substack{p+q+r=n, \\ q\neq n}} [\Lambda_\alpha^{(p)}, \Psi^{(q)}]_{*^r}$$

şeklinde yazılabilir. Çözümler

- ya bu denklemi mertebe mertebe çözerek
- ya da bu denkleme karşılık gelen diferansiyel denklemi çözerek elde edilebilir.

Ancak, muhtemelen çözümleri bulmanın en kolay yolu boyut indirgeme yöntemini kullanmaktır ! (K.U, Saka PRD'07)

Basit boyut indirgemesi (örneğin altı boyuttan dört boyuta inmek) basitçe altı boyutta tanımlanan teorinin sadece dört boyuttaki koordinatlara bağlı olmasını sağlayarak elde edilebilir. Örneğin altı boyutlu uzayın koordinatları

$$x^M = (x^0, \cdots, x^3, z^1, z^2)$$

olsun. Böylelikle altı boyuttaki ayar alanı

$$A^M(x^\mu) \to (A^\mu, A^5, A^6)$$

şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla bir 4-vektör, iki de reel skaler alan elde edilir.

Benzer şekilde deformasyon parametresinin θ'nın kompaktifiye edilecek boyutlardaki elemanları sıfıra eşitlenebilir.

$$\Theta^{MN} = \begin{pmatrix} \theta^{\mu\nu} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Böylelikle önce elde edilen

$$A_N^{(n+1)} = -\frac{1}{4(n+1)}\theta^{KL} \sum_{p+q+r=n} \{A_K^{(p)}, \partial_L A_N^{(q)} + F_{LN}^{(q)}\}_{*^r}.$$

çözüme boyut indirgemesi uygulanırsa bir kompleks skaler alanın n.nci mertebeden çözümü elde edilir :

$$\psi^{(n+1)} = -\frac{1}{4(n+1)}\theta^{\kappa\lambda} \sum_{p+q+r=n} \{A_\kappa^{(p)}, (\partial_\lambda \Psi^{(q)} + (D_\lambda \Psi)^{(q)})\}_{*^r}.$$

Burada,

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi - i[A_\mu, \psi]\,,\ (D_\mu \Psi)^{(n)} = \partial_\mu \Psi^{(n)} - i \sum_{p+q+r=n} [A_\mu^{(p)}, \Psi^{(q)}]_{*^r}\,.$$

ifade etmektedir.

- Bozonik ve fermionik alanlar için bulunacak çözümlerin yapıları aynı olacağından yukarıdaki çözüm aynı zamanda fermiyonik alanlar için de kullanılabilir.
- Yukarıdaki çözümün aynısı

$$\frac{\partial\hat{\Psi}}{\partial\theta^{\kappa\lambda}} = -\frac{1}{8}\{\hat{A}_\kappa, (\partial_\lambda\hat{\Psi} + \hat{D}_\lambda\hat{\Psi})\}_* + \frac{1}{8}\{\hat{A}_\lambda, (\partial_\kappa\hat{\Psi} + \hat{D}_\kappa\hat{\Psi})\}_*.$$

  diferansiyel deklemini çözerek de elde edilebilir.
- Dolayısıyla boyut indirgeme yöntemiyle verdiğimiz sonuç daha önce tartışılan çözümlerin doğruluğunu da farklı bir yoldan göstermiş olur.

Homojen olmayan çözümler :

$$\Delta C^{(n)} \equiv sC^{(n)} - i\{c, C^{(n)}\} = i \sum_{\substack{p+q+r=n,\\ p,q\neq n}} C^{(p)} *^r C^{(q)}$$

$$\Delta A_\mu^{(n)} \equiv sA_\mu^{(n)} - i[c, A_\mu^{(n)}] = \partial_\mu C_\alpha^{(n)} - i \sum_{\substack{p+q+r=n,\\ p\neq n}} [A_\mu^{(p)}, C_\alpha^{(q)}]_{*^r}$$

$$\Delta \Psi^{(n)} \equiv s\Psi^{(n)} - ic \cdot \Psi^{(n)} = i \sum_{\substack{p+q+r=n,\\ q\neq n}} C^{(p)} *^r \Psi^{(q)}$$

denklemleri

tüm θ mertebelerinde

$$C_\alpha^{(n+1)} = -\frac{1}{4(n+1)}\theta^{\kappa\lambda} \sum_{p+q+r=n} \{A_\kappa^{(p)}, \partial_\lambda C_\alpha^{(q)}\}_{*^r}$$

$$A_\gamma^{(n+1)} = -\frac{1}{4(n+1)}\theta^{\kappa\lambda} \sum_{p+q+r=n} \{A_\kappa^{(p)}, \partial_\lambda A_\gamma^{(q)} + F_{\lambda\gamma}^{(q)}\}_{*^r}.$$

$$\psi^{n+1} = -\frac{1}{4(n+1)}\theta^{\kappa\lambda} \sum_{p+q+r=n} A_\kappa^{(p)} *^r (\partial_\lambda \Psi^{(q)} + (D_\lambda \Psi)^{(q)}).$$

şeklinde çözümleri vardır !

Homojen çözümler :

Dikkat edilirse

$$\Delta \cdot = s \cdot - i\{c, \cdot\}$$

şeklinde tanımlanan operatör kovaryant türev ile yer değiştirir :

$$[\Delta, D_\mu] = 0 \Rightarrow \Delta F_{\mu\nu} = 0$$

Böylelikle her bir mertebe için homojen çözümlerin

$$\tilde{A}_\gamma^{(n)} \propto \mathcal{F}_\gamma^{(n)}(\theta, D, F) \quad , \quad \tilde{\Psi}^{(n)} \propto \mathcal{P}^{(n)}(\theta, D, F)\psi$$

formunda olması gerektiği bulunur.

Örneğin 1.nci mertebede

$$\tilde{A}^{(1)}_\gamma \propto \theta^{\mu\nu} D_\gamma F_{\mu\nu} \quad , \quad \tilde{\Psi}^{(1)} \propto \theta^{\mu\nu} F_{\mu\nu}\psi$$

2.nci mertebede

$$\begin{aligned}\tilde{A}^{(2)}_\gamma \propto \quad & \theta^{\mu\nu}\theta^{\kappa\lambda} D_\gamma(F_{\mu\nu}F_{\kappa\lambda})\,,\ \theta^{\mu\nu}\theta^{\kappa\lambda} D_\gamma(F_{\mu\kappa}F_{\nu\lambda})\,,\ \theta^{\mu\nu}\theta^{\kappa\lambda} D_\mu(F_{\gamma\nu}F_{\kappa\lambda})\,,\\ & \theta^{\mu\nu}\theta^{\kappa\lambda} D_\kappa(F_{\mu\nu}F_{\gamma\lambda})\,,\ \theta^{\mu\nu}\theta^{\kappa\lambda} D_\mu(F_{\kappa\nu}F_{\gamma\lambda})\,,\ \theta^{\mu\nu}\theta^{\kappa\lambda} D_\kappa(F_{\mu\lambda}F_{\gamma\nu})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi}^{(2)}_\gamma \propto \quad & \theta^{\mu\nu}\theta^{\kappa\lambda}(F_{\mu\nu}F_{\kappa\lambda})\psi\,,\ \theta^{\mu\nu}\theta^{\kappa\lambda}(F_{\mu\kappa}F_{\nu\lambda})\psi,\\ & i\theta^{\mu\nu}\theta^{\kappa\lambda}(D_\mu F_{\kappa\lambda})D_\nu\psi\,,\ i\theta^{\mu\nu}\theta^{\kappa\lambda}(D_\mu F_{\kappa\nu})D_\lambda\psi\end{aligned}$$

elde edilir.

1. mertebe homojen çözümlerin 2. mertebeye katkısı :

Homojen olmayan çözümler bir cins tekrarlama bağıntısı olarak verildiğini gördük. Dolayısıyla düşük mertbedeki çözümlere eklenecek homojen çözümler üst mertebedeki katkıları etkilemeli. Bu amaçla çözümleri

$$A^{(1)} \to A^{(1)} + \tilde{A}^{(1)} \quad , \quad \Psi^{(1)} \to \Psi^{(1)} + \tilde{\Psi}^{(1)}$$

$$A^{(2)} \to A^{(2)} + \bar{A}^{(2)} + \tilde{A}^{(2)}$$

$$\Psi^{(2)} \to \Psi^{(2)} + \bar{\Psi}^{(2)} + \tilde{\Psi}^{(2)}$$

şeklinde kısımlara ayıralım. $\bar{A}^{(2)}$ ve $\bar{\Psi}^{(2)}$ kısımları $\tilde{A}^{(1)}$ ve $\tilde{\Psi}^{(1)}$'den gelen katkıları göstersin.

Δ'nın tanımından ve $\Delta\tilde{A}^{(2)} = \Delta\tilde{P}^{(2)} = 0$ olacağından

$$\Delta\bar{A}^{(2)}_{\gamma} = i[C^{(1)}, \tilde{A}^{(1)}_{\gamma}] - \frac{1}{2}\theta^{\kappa\lambda}\{\partial_{\kappa}c, \partial_{\lambda}\tilde{A}^{(1)}_{\gamma}\}$$
$$\Delta\bar{\Psi}^{(2)} = iC^{(1)}\cdot\tilde{\Psi}^{(1)} - \frac{1}{2}\theta^{\kappa\lambda}\partial_{\kappa}c\cdot\partial_{\lambda}\tilde{\Psi}^{(1)}$$

elde edilir.
Bu denklemlerin çözümü ise

$$\bar{A}^{(2)}_{\gamma} = -\frac{1}{4}\theta^{\kappa\lambda}(2\{A_{\kappa}, \partial_{\lambda}\tilde{A}^{(1)}_{\gamma}\} - i\{A_{\kappa}, [A_{\lambda}, \tilde{A}^{(1)}_{\gamma}]\})$$
$$\bar{\Psi}^{(2)} = -\frac{1}{4}\theta^{\kappa\lambda}A_{k}(2\partial_{\lambda}\tilde{\Psi}^{(1)} - iA_{\lambda}\cdot\tilde{\Psi}^{(1)})$$

şeklindedir.


AAAGH!
THUD!!
CLANG!!
RGJ
NEWTON DISCOVERS SURREALISM

$\sim$ TEŞEKKÜRLER $\sim$